

1. Se consideran las ecuaciones diferenciales:

$$(A) : \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3t^2 e^{2t} \\ x(1) = 0 \end{cases}, \quad (B) : \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + e^{t^2+2t} \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

- a) Resolver la ecuación (A).
  - b) Sea  $x = x(t)$  solución de la ecuación (B). Si  $y(t) = e^{-2t}x(t)$ , probar que  $y'(t) = e^{t^2}$  y que  $y(0) = 0$ . Deducir que  $y(t) > 0$  para todo  $t > 0$ .
  - c) Demostrar que si  $x$  es solución de (B) entonces  $x$  es creciente en  $(0, +\infty)$ .
2. a) Sea  $h(x) = \frac{3x+\alpha}{x+1} - x$ . Estudiar el signo de  $h(x)$  para  $x > 0$  para los valores  $\alpha = -1$  y  $\alpha = 3$ .
- b) Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + \alpha}{x_n + 1}.$$

Determinar los puntos fijos para  $\alpha = -1$  y para  $\alpha = 3$ .

- c) Suponga  $\alpha = -1$ .
- 1) Si  $x_0 = 2$  hallar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
  - 2) Si  $x_0 = \frac{1}{2}$  determinar si la cantidad  $x_n$  se volverá negativa en algún momento.
3. Sea  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x}e^{x^2} & 0 \leq x \leq 1, \\ abx & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

- a) Hallar  $b$  para que  $f$  sea continua.
- b) Para el valor de  $b$  hallado en la parte a) calcular el volumen de sólido obtenido al girar la gráfica de  $f$  en torno al eje  $Ox$ .
- c) Determinar  $a \in [1, 3]$  tal que el volumen calculado en la parte b) sea máximo.