Introducción a las Ecuaciones Diferenciales
Curso 2007

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen 08/02/2008

1. Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales (2×2):

$$\begin{cases} x' = y - \lambda f(x) \\ y' = -x - y \end{cases}$$

donde λ es un parámetro real no negativo y f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de clase C^1, negativa en $(-1, 0)$ y positiva en $(0, 1)$.

a) Probar que existe V definida positiva con derivada (sobre las órbitas) definida negativa, con $V(0) = 0$ y cuyo dominio es la faja vertical $-1 < x < 1$.

b) Resolver el sistema para $\lambda = 0$.

c) Demostrar que para cualquier compacto K en $\mathbb{R}^2$ existe un $\epsilon > 0$ tal que si $\lambda \in (0, \epsilon)$ entonces la órbita futura de cualquier punto de K converge a 0.

2. Sea $U = [0, 1] \times (0, T)$. Decimos que $v \in C^{2,1}(U) \cap C(\overline{U})$ es una subsolución de la ecuación del calor si

$$v_t - v_{xx} \leq 0 \quad \text{en } U.$$

a) Probar que $\max_U v = \max_{\Gamma(U)} v$ donde $\Gamma(U) = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0, 1\} \times (0, T))$.

b) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un función diferenciable y convexa. Probar que si u es solución de la ecuación del calor y $v = \phi(u)$, entonces v es subsolución.

c) Probar que $v = u_x^2 + u_t^2$ es una subsolución si u es una solución de la ecuación.

3. Sea C una curva simple cerrada, L su longitud y A el área encerrada por ella.
La *desigualdad isoperimétrica* afirma que: $4\pi A \leq L^2$. Más aún, la igualdad se da si, y sólo si, C es una circunferencia.
A continuación sugerimos una prueba usando series de Fourier trigonométricas.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que C está parametrizada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{donde } t \in [-\pi, \pi] \quad \text{y } |\alpha'(t)| = L/2\pi.$$

El área encerrada por la curva puede calcularse (usando Stokes o Green) por

$$A = \int_{\mathrm{Int}(C)} dx \wedge dy = \int_C x dy = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) y'(t) dt = 2\pi \langle x(t), y'(t) \rangle.$$

a) Expresar L^2 y A en función de los coeficientes de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$.

b) Probar la desigualdad isoperimétrica $L^2 - 4\pi A \geq 0$.

c) Encontrar una condición sobre los coeficientes de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$ para que se de la igualdad. Concluir que se da si, y sólo si, C es una circunferencia.