

### Examen de Cálculo III

13/02/06

1. Sea  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{y+z} + x^3 + x = 1\}$  y  $p = (0, 0, 0)$ .
  - a) Probar que  $S$  es una superficie regular.
  - b) Hallar explícitamente el plano tangente a  $S$  en  $p$ .
  - c) Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $\alpha(t) = (0, t, -t)$ . Probar que  $\text{Im}(\alpha) \subset S$  y que  $v = \dot{\alpha}(0) \in T_p S$ .
  - d) Sea  $f : S \rightarrow S$  definida por  $f(x, y, z) = (x, z, y)$ . Hallar  $d_p f(v)$ .

2. Sean  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $\omega$  una 2-forma en  $[0, 1] \times U \subset \mathbb{R}^3$ . Llamaremos  $t$  a la coordenada en  $[0, 1]$  y  $(x, y)$  a las coordenadas de  $U$ . Observar que  $\omega$  se escribe en forma única como

$$\omega(t, x, y) = a_1(t, x, y) dt \wedge dx + a_2(t, x, y) dt \wedge dy + b(t, x, y) dx \wedge dy \quad (1)$$

Se define  $P\omega$ , una 1-forma en  $U \subset \mathbb{R}^2$ , mediante

$$P\omega(x, y) = \left( \int_0^1 a_1(t, x, y) dt \right) dx + \left( \int_0^1 a_2(t, x, y) dt \right) dy.$$

Análogamente, si  $\mu$  es una 3-forma en  $[0, 1] \times U \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\mu$  se escribe en forma única como

$$\mu(t, x, y) = c(t, x, y) dt \wedge dx \wedge dy$$

Se define  $P\mu$ , una 2-forma en  $U \subset \mathbb{R}^2$ , mediante

$$P\mu(x, y) = \left( \int_0^1 c(t, x, y) dt \right) dx \wedge dy.$$

- a) Sea  $\omega$  una 2-forma en  $[0, 1] \times U \subset \mathbb{R}^3$  que la escribimos como en (1). Probar:

$$d(P\omega) + P(d\omega) = (b(1, x, y) - b(0, x, y)) dx \wedge dy.$$

- b) Sea  $F : [0, 1] \times U \rightarrow U$  una función diferenciable. Escribimos

$$F(t, x, y) = (u(t, x, y), v(t, x, y)), \quad u, v : [0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Para cada  $t \in [0, 1]$  sea  $f_t : U \rightarrow U$  definida por  $f_t(x, y) = F(t, x, y)$ .

Probar que si  $t \in [0, 1]$  y  $\nu \in \Omega^2(U)$ ,  $\nu(u, v) = \alpha(u, v) du \wedge dv$ , entonces

$$f_t^*(\nu) = (\alpha(u(t, x, y), v(t, x, y))) \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(t, x, y) dx \wedge dy.$$

- c) Mostrar que si  $\nu \in \Omega^2(U)$ , y  $\omega = F^*(\nu)$ , entonces

$$d(P\omega) + P(d\omega) = f_1^*(\nu) - f_0^*(\nu)$$

- d) Un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  se dice *contractible*, si existe  $F : [0, 1] \times U \rightarrow U$  diferenciable con  $f_1 = Id_U$  y  $f_0$  una constante. Usar la parte 2c para probar que en un abierto contractible  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , toda 2-forma cerrada es exacta.

3. Sea  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{y+z} + x^3 + x = 1\}$  y  $p = (0, 0, 0)$ .
- a) Hallar una parametrización  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  que contenga a  $p$ .
  - b) Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental de  $S$  respecto a la parametrización  $X$ .
  - c) Probar que  $S$  es orientable. De ahora en adelante se elige una orientación de  $S$  de forma tal que la parametrización  $X$  sea compatible con la orientación de  $S$ .
  - d) Hallar la curvatura Gaussiana en  $X(U)$ .
  - e) Hallar la curvatura media en  $p$ .
  - f) Hallar las curvaturas principales en  $p$ .