

Examen de Cálculo III

Agosto de 2005

1. Sean $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \neq \pm 1\}$ y $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Para cada $p \in S$, sea \vec{op} la semirrecta de origen $o = (0, 0, 0)$ que pasa por p . Se define $f : S \rightarrow C$ mediante $f(p) = \vec{op} \cap C, \forall p \in S$.

- a) Probar que f es un difeomorfismo.
b) Se define $\gamma : (-\pi/4, 3\pi/4) \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\gamma(t) = (-\operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(\pi/4 + t), \cos(t) \operatorname{sen}(\pi/4 + t), \cos(\pi/4 + t)), \quad \forall t \in (-\pi/4, 3\pi/4).$$

- 1) Probar que $\operatorname{Im} \gamma \subset S$.
2) Sean $p = \gamma(0)$ y $v = \gamma'(0)$. Hallar $df_p(v)$.
3) Verificar que $df_p(v) \in T_{f(p)}C$.

2. Se considera $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

- a) Se define $f : U \rightarrow U$ por $f(u, v) = (uv, u/v), \forall (u, v) \in U$. Probar que f es un difeomorfismo.
b) Sea ω la 1-forma en U definida por $\omega = \frac{2xy}{1+x^4y^2} dx + \frac{x^2}{1+x^4y^2} dy$. Probar que ω es exacta.
c) Hallar explícitamente $\eta = f^*(\omega)$.
d) Sean γ_1 y γ_2 los caminos en U definidos mediante

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow U, \quad \gamma_1(t) &= (e^{t^2-1}, 2t^2 + 3), \quad -1 \leq t \leq 1, \\ \gamma_2 : [0, 2] \rightarrow U, \quad \gamma_2(t) &= \begin{cases} (t+1, (t+1)^2), & 0 \leq t \leq 1 \\ (3-t, \frac{1}{7}(2(3-t)^3 + 12)), & 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Calcular $\int_{\gamma_1} \eta$ y $\int_{\gamma_2} \eta$.

3. a) Sea S una superficie orientada y $X : U \rightarrow S$ una parametrización compatible con la orientación. Probar que $F = f = 0$ en U implica que la matriz $[dN_p]_{\{X_u(p), X_v(p)\}}$ es diagonal para todo $p \in X(U)$. Sugerencia: observar que si

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v, \end{aligned}$$

entonces los a_{ij} se obtienen a partir de E, F, G, e, f, g .

- b) Sean $x = f(v), z = g(v)$ una parametrización de una curva α contenida en el plano xz , con $f(v) > 0, \forall v \in (a, b)$. Se considera la superficie de revolución S obtenida al girar el gráfico de α un ángulo u alrededor del eje z .
- 1) A partir de la parametrización de α obtener una parametrización de S .
2) Hallar los coeficientes de la primera forma fundamental en la parametrización hallada.
3) Deducir que las direcciones principales son los meridianos y los paralelos de S .