Centro de Matemática. 1^o de marzo de 2007

Examen de Cálculo diferencial e integral II

Ejercicio 1. Se considera el punto $P = (1, 1, 1)$ y los planos π_1 de ecuación $x + 2y + z = 0$ y π_2 de ecuación $x + y + 2z = 0$.

(a) Determinar el punto Q perteneciente al plano π_1 que minimiza la distancia a P y calcular esta distancia.

(b) Determinar el punto R de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 que minimiza la distancia a P y calcular esta segunda distancia.

Ejercicio 2.

(a) Calcular la integral

$$I(r) = \iint_{D(r)} (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

donde el dominio de integración es

$$D(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

(b) Demostrar que la integral impropia

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

es convergente y calcularla.

(c) Utilizar un procedimiento similar para calcular la integral impropia

$$J = \iint_{C} xye^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

donde el dominio de integración es ahora

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Ejercicio 3. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida del siguiente modo: Dado un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ consideramos la recta en $\mathbb{R}^3$ que determinan el punto $(x, y, 0)$ y el punto $N = (0, 0, 1)$, esta recta intersecta a la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en el punto N y en otro punto que llamaremos $f(x, y)$.

(a) Escribir las fórmulas que definen $f(x, y)$ (Sugerencia: considerar la curva en $\mathbb{R}^3 : tN + (1 - t)(x, y, 0)$ y hallar t) y probar que $f(x, y)$ es diferenciable.

(b) Hallar la imagen por f del disco unidad $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$. Hallar la imagen del complemento del disco unidad.

(c) Sea $\{p_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que $\|p_n\| \to \infty$. Demostrar que $f(p_n) \to N$.

Centro de Matemática. 1º de marzo de 2007

Soluciones - Cálculo diferencial e integral II

Ejercicio 1.

(a) Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange se obtiene $Q = (1/3, -1/3, 1/3)$ y $d(P, Q) = \frac{2}{3}\sqrt{6} \sim 1,63$.

(b) Análogamente (con dos multiplicadores) se obtiene $R = (-6/11, 2/11, 2/11)$, y $d(P, R) = \sqrt{41/11} \sim 2,02$.

Ejercicio 2.

(a) Despues del cambio a polares

$$I(r) = \pi - \pi(r^2 + 1)e^{-r^2}.$$

(b) Como $I(r)$ converge, converge la integral, y resulta

$$I = \pi.$$

(c) Análogamente resulta $J = 1/4$ (La integral en ρ de las coordenadas polares es la misma que en (b)).

Ejercicio 3.

(a) Resulta

$$t = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1},$$

de donde

$$f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right).$$

La diferenciabilidad sale de las fórmulas.

(b) La imagen de D es la mitad inferior de la esfera (incluyendo la frontera). La imagen de D^c es la mitad superior de la esfera (excluyendo la frontera) menos en punto N.

(d) De las fórmulas halladas, resulta que si $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ entonces

$$\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \to 0,$$

porque el primer factor es acotado, análogamente la segunda coordenada, y

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} \to 1.$$