

Examen de Cálculo diferencial e integral II

Ejercicio 1.

- (a) Calcular el volumen V_C del cuerpo en el espacio interior al cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ y comprendido entre el plano $z = 0$ y el plano $x + y + z = 2$.
- (b) Calcular el baricentro G del sector de esfera S determinado mediante

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Nota: El baricentro $G = (x_G, y_G, z_G)$ tiene coordenadas

$$x_G = \frac{1}{V} \iiint_S x dx dy dz, \quad y_G = \frac{1}{V} \iiint_S y dx dy dz, \quad z_G = \frac{1}{V} \iiint_S z dx dy dz.$$

donde V es el volumen del cuerpo.

Ejercicio 2. Se considera la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + y^4.$$

- (a) Determinar los puntos críticos de f en todo el plano y clasificarlos.
- (b) Determinar los extremos absolutos de f en el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}.$$

Ejercicio 3. Sea $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y) = y^3 + y(x^2 + 1) - 2.$$

- (a) Demostrar que en el punto $(0, 1)$ la función F define una función implícita $y = f(x)$. Verificar que $x = 0$ es punto crítico de f .
- (b) Calcular $f''(0)$ y clasificar el punto crítico.
- (c) Demostrar que para cada x existe un único $y > 0$ tal que $F(x, y) = 0$, por lo que f se puede definir en toda la recta real.
- (d) Demostrar que $f(x) = f(-x)$, estudiar el signo de $f'(x)$ y realizar un bosquejo de $f(x)$.

Soluciones - Cálculo diferencial e integral II

Ejercicio 1.

(a) Mediante cambio a coordenadas cilíndricas se obtiene

$$V_G = 2.$$

(b) Mediante cambio a coordenadas esféricas se obtiene

$$\iiint_S x dx dy dz = \frac{\pi r^4}{16}.$$

Como el volumen es la octava parte del volumen de una esfera, que vale $\pi r^3/6$ tenemos $x_G = 3r/8$. Las otras coordenadas son análogas (o iguales, por simetría), de donde $G = (3r/8, 3r/8, 3r/8)$.

Ejercicio 2.

(a) Los puntos críticos son $(0, 0)$ que es un punto silla dado que $f(0, y) \geq 0$ y $f(x, 0) \leq 0$ si $x < 0$ (el hessiano en este punto se anula), y $(3/4, 3/4)$ que resulta mínimo relativo con el criterio del hessiano.

(b) Luego de estudiar todos los candidatos en los 4 bordes, y los 4 vértices, el máximo absoluto vale 56, en el punto $(2, -2)$, y el mínimo absoluto vale -24 , en el punto $(-2, 2)$.

Ejercicio 3.

(a) Se verifican las hipótesis del Teorema. Calculando F_x y F_y resulta $f'(0) = 0$.

(b) Calculando las derivadas parciales de segundo orden se obtiene $f''(0) = -1/2$, por lo que en $x = 0$ la función f presenta un máximo relativo.

(c) Para cada x fijo, la función $F(x, y)$ es creciente, de menos a más infinito, y $F(x, 0) = -2$, por lo que la única raíz es positiva.

(d) La paridad de f resulta de $F(x, y) = F(-x, y)$, que da la igualdad. Como $F_y > 0$ para todo (x, y) , y tenemos $y = f(x) > 0$, visto que $F_x = 2xy$ el signo de $f'(x)$ es el de $-x$. De allí sale el bosquejo.