Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
CÁLCULO I
Curso 2005.

Examen, 25 de julio.

1. Considerar la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{n+2}$.

   a) Determinar el conjunto H de los x reales para los cuales la serie converge.

   b) Hallar $B(x)$ la solución de: $\begin{cases} y' = \frac{2}{1-x}y + \frac{3x^2+2x}{(1-x)^2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$

   c) Probar que $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{n+2}$, para todo $x \in H$.

   d) Calcular $B^{(n)}(0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   e) Clasificar:
   - $\int_1^2 B(x)^{1/2}dx$;
   - $\int_2^{\infty} \frac{B(x)}{x^2\log^2(x)}dx$.

2. Se consideran las integrales impropias:
   - $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2+n^2}dt$;
   - $\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t(\sqrt{t^2-n^2})}dt$.

   a) Probar que son convergentes para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo.

   Se definen las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por: $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2+n^2}dt$; $b_n = \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t(\sqrt{t^2-n^2})}dt$.

   b) Mostrar, a través de un cambio de variable, que $b_n = e^{-n^2}a_n$.

   c) Probar que ambas sucesiones son decrecientes y deducir que $\lim b_n = 0$.

   d) Probar que $\lim a_n = 0$.

   e) Clasificar las series:
   - $\sum \sqrt{b_n}$;
   - $\sum(-1)^n a_n$.

3. Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\int_1^{+\infty} |f'(x)|dx$ converge.

   a) Probar que existe $\alpha = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ y es finito.

   b) Suponiendo que $\alpha = 0$, probar que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)dx$ converge.

   c) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_n^{n+1} f(x)dx - f(n)\right|$ converge.

   d) Deducir que $\sum f(n)$ converge si y sólo si $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.