Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Examen de Álgebra Lineal II
22/02/05

1. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto intreno usual y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ tal que $\|v_1\| = 2\,\|v_2\|$ y $\|v_3\| = 2\,\|v_4\|$. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal que verifica

$$T(v_1) = 4v_2, \quad T(v_2) = v_1, \quad T(v_3) = 2v_4, \quad T(v_4) = -\frac{1}{2}v_3.$$

   a) Hallar un subespacio T-invariante no trivial S de $\mathbb{R}^4$ tal que $T|_S$ sea unitaria.
   b) Hallar un subespacio T-invariante no trivial W de $\mathbb{R}^4$ tal que $T|_W$ sea autoadjunta.
   c) ¿Es T normal? Justificar la respuesta.

2. Sea V un espacio vectorial. Dados $\varphi \in \mathrm{Alt}_2(V)$ y $\alpha \in V^*$, definimos $\varphi \diamond \alpha : V \times V \times V \to \mathbb{k}$ mediante

$$(\varphi \diamond \alpha)(u, v, w) = \varphi(u, v)\ \alpha(w) + \varphi(v, w)\ \alpha(u) + \varphi(w, u)\ \alpha(v), \quad \forall\ u, v, w \in V.$$

   a) Probar que $\varphi \diamond \alpha \in \mathrm{Alt}_3(V),\ \forall\ \varphi\,\mathrm{Alt}_2(V),\ \alpha \in V^*$.
   b) Probar que si $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Alt}_2(V)$, $\alpha, \alpha' \in V^*$ y $a \in \mathbb{k}$, entonces

$$\big(a\,\varphi + \varphi'\big) \diamond \alpha = a\ (\varphi \diamond \alpha) + \varphi' \diamond \alpha, \quad \varphi \diamond \big(a\,\alpha + \alpha'\big) = a\ (\varphi \diamond \alpha) + \varphi \diamond \alpha'.$$

   (Probar solo una de las dos igualdades.)
   c) Probar que si $\alpha, \beta, \gamma \in V^*$, entonces $(\alpha \wedge \beta) \diamond \gamma = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$.
   d) Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $V = \mathbb{R}^4$ y consideramos la base de $\mathrm{Alt}_3(V)$ definida por $\mathcal{B} = \Big\{e_i^* \wedge e_j^* \wedge e_k^* :\ 1 \leq i < j < k \leq 4\Big\}$. Sean $\varphi \in \mathrm{Alt}_2(V)$ y $\alpha \in V^*$ definidas por

$$\varphi\left((x, y, z, t)\,, \big(x', y', z', t'\big)\right) = x\,y' - x'\,y + 2\,y\,t' - 2\,y'\,t, \quad \alpha(x, y, z, t) = x + 2\,y + 3\,z.$$

   Escribir explícitamente $\varphi \diamond \alpha$ en función de la base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Alt}_3(V)$.

3. *a*) Sean $A, B \in M_7(\mathbb{R})$ tales que
   - $\mathrm{rango}\,(A - 2I)^2 = \mathrm{rango}\,(A - 3I)^3 = 4$.
   - $\dim \mathrm{Ker}\,(L_A - 2I) = \dim \mathrm{Ker}\,(L_A - 3I) = 2$.
   - $p(A) = 0$, siendo $p(x) = (x^2 - 5x + 6)^5$.
   - $(x - 3)\,m_A(x) = m_B(x)$.
   - $(x - 2)\chi_B(x) = (x - 3)\chi_A(x)$.

   Hallar las formas de Jordan de A y de B.