

Examen 5/8/04

1. Sea V un espacio vectorial y $\varphi : V \rightarrow V$ lineal de la cual se sabe:

- Existen U y W subespacios φ -invariantes de V tales que $V = U \oplus W$.
- La dimensión de U es 1.
- Existe una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ de W tal que

$$\varphi(w_1) = 4w_1 + w_2, \quad \varphi(w_2) = -2w_1 + w_2, \quad \varphi(w_3) = 2w_1 + 2w_2 + 3w_3.$$

Se pide:

- a) Probar que φ es diagonalizable.
 - b) De ahora en adelante se sabe que φ tiene solo dos valores propios y que la multiplicidad algebraica de cada valor propio es a lo más dos. Hallar la forma diagonal de φ .
 - c) Sea $0 \neq u \in U$. Hallar a partir de u , w_1 , w_2 y w_3 una base de V formada por vectores propios de φ .
2. Sea $\varphi : V \rightarrow V$ una transformación lineal en un espacio de dimensión finita sobre \mathbb{C} . Sea \mathcal{B} una base de Jordan y S la matriz diagonal cuyas entradas diagonales coinciden con las de la forma de Jordan $[\varphi]_{\mathcal{B}}$. Sea $N = [\varphi]_{\mathcal{B}} - S$.
- a) Considerando el caso particular en el cual

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

probar que $S + N$ y $S + aN$ son semejantes cualquiera sea $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Sugerencia: conjugar $S + N$ por una matriz diagonal.)

- b) Concluir en general que si S y N son cualesquiera, $S + N$ y $S + aN$ son semejantes para todo $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- c) Probar que el polinomio minimal de S divide al polinomio minimal de $S + aN$ para todo $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

3. Sea $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}(ah + ed - bg - fc).$$

Se pide:

- a) Probar que φ es una forma bilineal simétrica.
- b) Sean E , S y A subespacios de $M_2(\mathbb{R})$, siendo E las matrices escalares, A las matrices antisimétricas y S las matrices simétricas de traza cero. Probar que φ es definida positiva en E y en A y que es definida negativa en S .
- c) Hallar una φ -descomposición de $M_2(\mathbb{R})$.
- d) Investigar si φ degenera.