Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2003

Examen 22/12/03

1. Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita n y W un subespacio de V de dimensión k, $1 < k < n$. Consideremos $\rho_W : V \to V$ la proyección ortogonal sobre W y $\varphi = \mathrm{id} - 3\,\rho_W$.

   a) Probar que φ es autoadjunta.

   b) Calcular $\varphi|_W$ y $\varphi|_{W^\perp}$.

   c) Hallar el polinomio característico y el polinomio minimal de φ.

   d) Deducir que φ es invertible y hallar φ^{-1} en función de φ.

   e) Sea ψ un operador normal tal que sus únicos valores propios son 1 y -2. Probar que existe un subespacio W de V tal que $\psi = \mathrm{id} - 3\,\rho_W$.

2. Sean $A, B, C, D \in M_7(\mathbb{R})$ tales que:

   - $\left\{(A - 3\ \mathrm{Id})^3 v,\ (A - 3\ \mathrm{Id})^2 v,\ (A - 3\ \mathrm{Id}) v,\ v,\ Au,\ u,\ w\right\}$ es base de $\mathbb{R}^7$ con
   $$(A - 3\ \mathrm{Id})^4 v = A^2 u = Aw = 0.$$
   - • El polinomio característico de B solo tiene raíces 0 y 3.
     • El diagrama de puntos para B correspondiente al valor propio 3 es
     $$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \end{array}$$
     • El polinomio minimal de B es de la forma $m_B(x) = p(x)\,x$, donde $p(x)$ no se anula en 0.
   - $\mathrm{rango}(C) = 6,\ \mathrm{rango}\left(C^2\right) \neq \mathrm{rango}\left(C^3\right),\ \mathrm{rango}\left(C^3\right) = \mathrm{rango}\left(C^4\right),\ \mathrm{rango}(C - 3\ \mathrm{Id}) = 3.$
   - $D^4 - 6D^3 + 9D^2 = 0,\ \dim \mathrm{Ker}\, D = 2,\ \mathrm{rango}\left(D^2\right) = 5,\ \dim \mathrm{Ker}\,(D - 3\ \mathrm{Id}) = 3.$

   a) Hallar las formas de Jordan de A, B, C y D.

   b) Hallar los polinomios característico y minimal de A, B, C y D.

   c) ¿Son A, B, C y D semejantes? (Justificar la respuesta.)

3. Sea $\varphi \in \mathrm{Bil}_S\left(\mathbb{R}^3\right)$ tal que su forma cuadrática asociada es
   $$\Phi(x, y, z) = -4\,x^2 + 7\,y^2 - 3\,z^2 - 20\,xy + 4\,xz + 10\,yz, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Hallar el índice, rango y signatura de Φ.

   b) Hallar una base φ-ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

   c) Hallar una base φ-ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

   d) Hallar subespacios (dar bases) V_+ y V_- de R^3 tales que Φ sea definida positiva en V_+, definida negativa en V_-, V_+ y V_- sean φ-ortogonales y $\mathbb{R}^3 = V_+ \oplus V_-$.