

Examen 8/03

1. Sean $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ una base del espacio vectorial complejo $V = \mathbf{C}^{2n}$, donde $n \geq 1$, y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

- (a) Calcular $[T^2]_{\beta}$ y hallar el polinomio mínimo de T . Deducir los valores propios de T . ¿Es T diagonalizable?
- (b) Sea W_j el subespacio generado por $\beta_j = \{v_j, w_j\}$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Probar que W_j es invariante bajo T y hallar la matriz asociada a $T|_{W_j}$, la restricción de T a W_j , en la base β_j . Hallar los vectores propios de $T|_{W_j}$.
- (c) Hallar las dimensiones de los subespacios propios de T . ¿Cuál es el polinomio característico de T ?
2. Sean V el espacio vectorial complejo \mathbf{C}^4 y $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{C}$, dado por:

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = (x + y)\overline{(x' + y')} + 4(y - z)\overline{(y' - z')} + zz'.$$

- (a) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en \mathbf{C}^4 y hallar una base ortonormal de V .
- (b) Sea W el subespacio generado por $(-1, 1, i)$, y sea P_W la proyección ortogonal sobre W . Calcular $P_W(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in V$.
- (c) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ dada por $T(x, y, z) = (3 - i)P_W(x, y, z) - 2iP_{W^\perp}(x, y, z)$. Hallar la forma diagonal de T .
3. Sean V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que

i) $T^4(T^2 + I) = 0$.

ii) $\dim \ker T^2 = 3 = \dim \ker T^3$.

iii) $T + iI$ es sobreyectiva.

iv) $\dim \ker (T - iI) = 3$.

- (a) Hallar los valores propios de T y la dimensión del correspondiente subespacio propio generalizado K_{λ} , para cada valor propio λ .
- (b) Hallar la dimensión de V y el polinomio característico de T .
- (c) Hallar las posibles formas canónicas de Jordan de T y, en cada caso, el correspondiente polinomio mínimo de T .