Examen 7/03

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

   (a) Hallar una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que $D = Q^t A Q$.

   (b) Sea H la forma bilineal simétrica en $\mathbf{R}^3$ dada por

   $$H((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

   Hallar la forma cuadrática asociada a H. Calcular su rango, índice y signatura.

2. Sean V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $x_0 \in V$, $x_0 \neq 0$, y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\operatorname{Im} T \subset W$, donde W es el subespacio de V generado por x_0.

   (a) Sea $\phi : V \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $\phi(v) = \lambda$, donde $Tv = \lambda x_0$, para todo $v \in V$. Probar que ϕ es lineal y concluir que existe $y_0 \in V$ tal que $Tv = \langle v, y_0 \rangle \, x_0$, para todo $v \in V$.

   (b) Hallar, en función de x_0 e y_0, los valores propios de T y los correspondientes subespacios propios. Determinar si T es diagonalizable.

   (c) Probar que $T^* v = \langle v, x_0 \rangle \, y_0$, para todo $v \in V$.

   (d) Probar que si $y_0 = x_0$ y $\|x_0\| = 1$, entonces T es una proyección ortogonal.

3. Sea $T : \mathbf{C}^4 \longrightarrow \mathbf{C}^4$ dada por $T(x, y, z, t) = (2y + t, 0, x + y + t, 0)$

   (a) Hallar la forma canónica de Jordan de T y una base de Jordan.

   (b) Hallar el polinomio mínimo de T.

   (c) Calcular $[P(T)](0, 1, 1, 0)$ donde $P(x) = x^6 + x + 1$.