Centro de Matemática
Algebra Lineal II. Agosto 1999.

EXAMEN.

1. Se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 2 \\ 7 & -9 & 2 \\ 7 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Probar que A es diagonalizable.
   (b) Hallar matrices Q y D tales que
      - Q es invertible
      - D es diagonal
      - $A = QDQ^{-1}$
   (c) Deducir que $A^n = (-1)^{n+1}A, \ \forall n \in N$.

2. Sean $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base ortogonal de R^4 con $\|v_1\| = \|v_2\|$ y $T : R^4 \to R^4$ lineal tal que:
   - $T(v_1) = v_2$
   - $T(v_2) = -v_1$
   - $T(v_3) = 0$
   - $T(v_4) = 3v_4$

   (a) Hallar S_1 subespacio de V invariante bajo T, tal que
$$T_{|S_1} : S_1 \to S_1 \text{ es autoadjunta.}$$
   (b) Hallar S_2 subespacio de V invariante bajo T, tal que
$$T_{|S_2} : S_2 \to S_2, \text{ es unitaria.}$$
   (c) ¿Es T normal? Justificar la respuesta.

3. Sean $A, B, C \in M_{6\times 6}(R)$ que verifican:
   - $A^4 = 4A^3 - 4A^2$, $A^3 \neq 4A^2 - 4A$, $A^4 \neq 5A^3 - 6A^2$, $r(A) = 4$, $r(A^2) = 2$.
   - $r(B - 2I) = 5$, $r\left((b - 2I)^2\right) = 4$, $r(B) = 3$, $r(B^2) = 2$.
   - Existen $u, v, w \in R^6$ tales que $\mathcal{B} = \{u, (c - 2I)u, v, Cv, C^2v, w\}$ es base de R^6, con
$$(C - 2I)^2u = C^3v = Cw = 0.$$

   (a) Hallar las formas de Jordan de A, B y C.
   (b) ¿A, B y C son semejantes? Justificar la respuesta.