Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Examen de Álgebra Lineal II
09/03/1999

1. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, se define $T_\lambda : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, por
$$T_\lambda\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = (a + b(1-\lambda))x^3 - 2\lambda c x^2 + \lambda(b + 3c)x + 3\lambda d.$$
   (a) Discutir según λ cuándo T_λ es diagonalizable.
   (b) Para los casos $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$, decir si hay o no una base de $\mathbb{R}_3[x]$ formada por vectores propios de T_λ y en caso afirmativo hallarla.

2. Sea P una matriz $n \times n$ real invertible.
   (a) i. Probar que P^tP es simétrica y que existe una matriz Q ortogonal tal que
$$Q^tP^tPQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$
   ii. Concluir que $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Sugerencia: probar que $\langle P^tP \cdot v, v\rangle = ||P \cdot v||^2$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ (v vector columna), siendo $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$.
   (b) i. Sea
$$S = Q \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} Q^t$$
   y $R = PS^{-1}$. Probar que $R^tR = I$.
   ii. Concluir que toda matriz real invertible se puede expresar como producto de una matriz ortogonal y una matriz simétrica invertible.
   (c) Si $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, hallar explícitamente R y S.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Se pide:
   (a) Hallar J_A la forma de Jordan de A.
   (b) Hallar el polinomio minimal de A.
   (c) Hallar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = J_A$.

$- - - 0 - - -$