

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Examen de Álgebra Lineal II
17/02/1999

1. Se define la transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ mediante

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a - 2c)(1 + x^2) + (2d - b)(x + x^3).$$

Se pide:

- Hallar los valores propios de T .
 - Hallar los subespacios propios de T .
 - ¿Es T diagonalizable? Justificar la respuesta.
 - Hallar una fórmula explícita para T^n , $n \in \mathbb{N}$.
2. Se considera en \mathbb{R}^3 el producto interno usual y los subespacios $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0\}$ y $\tilde{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + z = 0\}$. Sean P_S y $P_{\tilde{S}}$ las proyecciones ortogonales sobre S y \tilde{S} respectivamente. Para a y b en \mathbb{R} se define $T_{a,b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante $T_{a,b} = aP_S + bP_{\tilde{S}}$, es decir

$$T_{a,b}(x, y, z) = aP_S(x, y, z) + bP_{\tilde{S}}(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Se pide:

- Probar que $T_{a,b}$ es un operador autoadjunto para todo a y b .
 - Demostrar que S y \tilde{S} son subespacios $T_{a,b}$ -invariantes para todo a y b .
 - Hallar valores propios de $T_{a,b}$. Discutir la cantidad de valores propios distintos de $T_{a,b}$ según a y b .
 - Hallar subespacios propios de $T_{a,b}$ discutiendo según a y b .
 - En el caso $a = b = 1$ hallar la descomposición espectral de $T_{1,1}$. En particular si $T_{1,1} = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ es dicha descomposición, dar fórmulas explícitas para P_1, \dots, P_n .
3. Se define la transformación lineal $T : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x]$ mediante

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = a + b - c - d + e + (b - d + e)x + (c - d + e)x^2 + ex^3.$$

Se pide:

- Hallar la forma de Jordan de T .
- Probar que $B = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ es base de $\text{Ker}(T - \text{Id})^3$.
- Sea $\hat{T} = T|_{\text{Ker}(T - \text{Id})^3}$ la restricción de T a $\text{Ker}(T - \text{Id})^3$. Hallar la matriz asociada a \hat{T} en la base B .
- Hallar una base de Jordan para T .