Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Examen de Álgebra Lineal II
21/12/1998

1. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 := \{(x,y,z) :\ x+y=0\}\,, \quad V_2 := \{(x,y,z) :\ x+z=0\}\,, \quad V_3 := \{(x,y,z) :\ y+z=0\}\,.$$

Se pide:

(a) Hallar bases de $V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap V_3$ y $V_2 \cap V_3$.

(b) Sean S y T dos transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tales que ambas dejan invariantes a los subespacios V_1, V_2 y V_3. Demostrar que S y T son diagonalizables y que conmutan.

(c) Supongamos además que existen constantes a, b y c tales que

$$\left(T^2 - aT\right)|_{V_1} = cI|_{V_1}, \quad T|_{V_2} = bI_{V_2} \quad \text{y} \quad T|_{V_2} \neq I_{V_2}.$$

i. Hallar a, b y c sabiendo que 1 y 2 son valores propios de T.
ii. Hallar T.
iii. Probar que existen bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que ${}_{B'}[T]_B = \mathrm{Id}$
iv. Hallar B y B' que verifiquen las condiciones de 1(c)iii.

2. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n.

(a) Sea T un operador en V que tiene un valor propio λ de multiplicidad algebraica uno.

i. Probar que $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(T - \lambda\,\mathrm{Id})^2$. (Sugerencia: suponer que $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda\,\mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}\,(T - \lambda\,\mathrm{Id})^2$ y tomar $v \in \mathrm{Ker}\,(T - \lambda\,\mathrm{Id})^2 \setminus \mathrm{Ker}\,(T - \lambda\,\mathrm{Id})$. Calcular el polinomio característico de T restringido al subespacio generado por $\{(T - \lambda\,\mathrm{Id})(v), v\}$.)
ii. Probar que $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(T - \lambda\,\mathrm{Id}) = V$.
iii. De ahora en adelante suponemos fijo en V un producto interno $\langle , \rangle$.
Sea v un vector propio de T^* correspondiente al valor propio λ. Probar que $v \in (\mathrm{Im}(T - \lambda\,\mathrm{Id}))^{\perp}$.
iv. Sea w un vector propio de T correspondiente al valor propio λ. Probar que v y w no son ortogonales.
v. Probar que existen subespacios T-invariantes U y W tales que $V = U \oplus W$, con $\dim U = n-1$.

(b) Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual y el operador L_A, siendo A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

i. Probar que L_A está en las hipótesis de 2a.
ii. Hallar U y W.

3. Sean $A, B \in M_n(k)$ que verifican:

- $X_A(t) = X_B(t) = (t-2)^4(t-3)^4$.
- $m_A(t) = (t-2)^3(t-3)^2$.
- rango$(A - 3I) = 6$.
- rango$(B - 2I) = 6$, rango$(B - 2I)^2$ =rango$(B - 3I) = 5$.

Se pide:

(a) Hallar n.

(b) Hallar la forma de Jordan J_A de A.

(c) Hallar la forma de Jordan J_B de B.

(d) ¿Son A y B semejantes? Justificar la respuesta.