Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Exámen de Álgebra Lineal II
20/7/1998

1. Se define $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mediante

$$T(x,y,z,t) = (2x - y + t, y + t, -2 + 3z + t, -2y + 4t),$$

y se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \{(x,y,z,t) : \ y = z = t\}, \quad S_2 = [(1,1,2,2), \ (1,1,1,2)].$$

   (a) Probar que $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_2$.

   (b) Probar que S_1 y S_2 son invariantes bajo T.

   (c) Sean $T_1 = T|_{S_1} : S_1 \to S_1$ y $T_2 = T|_{S_2} : S_2 \to S_2$. Probar que $T_1 = a\,\mathrm{Id}_{S_1}$ y $T_2 = b\,\mathrm{Id}_{S_2}$ siendo a y b constantes que se determinarán.

   (d) Hallar valores y vectores propios de T_1 y de T_2.

   (e) Hallar valores y vectores propios de T.

2. Sea $(V, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno. Una función $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ es una *forma bilineal antisimétrica* si

$$\phi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\phi(u,w) + \beta\phi(v,w), \quad \phi(w,v) = -\phi(v,w)$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in V$.

   (a) Probar que si $T : V \to V$ es una transformación lineal, ϕ_T definida por

$$\phi_T(v,w) = \langle T(v), w\rangle$$

   es una forma bilineal antisimétrica si y solamente si T es antisimétrica ($T^* = -T$).

   (b) Si ϕ es una forma bilineal antisimétrica, entonces en forma análoga a como se prueba la existencia del operador adjunto de una transformacion lineal, se prueba que existe una única transformación lineal $T_\phi : V \to V$ antisimétrica tal que

$$\phi(v,w) = \langle T_\phi(v), w\rangle, \quad \forall v, w \in V.$$

   Se considera el subespacio $N_\phi = \{v \in V : \ \phi(v,w) = 0 \ \forall w \in V\}$. Probar que $N_\phi = \ker T_\phi$. Si $N_\phi = 0$, se dice que ϕ es *no degenerada.*

   (c) Usar el hecho de que $\det(T_\phi) = \det\left(T_\phi^*\right)$ para probar que si ϕ es no degenerada entonces $\dim V$ es par.

(d) Sea ϕ una forma bilineal antisimétrica no degenerada. Por lo anterior, sabemos que $\dim V = 2n$. Un subespacio $W \subseteq V$ se dice *isotrópico*, si $\phi(w_1, w_2) = 0 \ \forall w_1, w_2 \in W$. Probar que en tal caso $\dim W \leq n$. (Sugerencia: Sea $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base de W. Extenderla a $\{w_1, \dots, w_{2n}\}$ base de V. Ver que si $\dim W > n$, entonces es posible encontrar un $0 \neq w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i \in W$ tal que $\phi(w, w_i) = 0$ para $i = k+1, \dots, 2n$.)

3. (a) Sea $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, hallar una fórmula para E^n, $n = 0, 1, \dots$.

(b) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineal que verifica $(T - \mathrm{Id})^2 = 0$ y $\mathrm{rango}(T - \mathrm{Id}) = 2$.

i. Hallar J la forma de Jordan de T.

ii. Se sabe que $B = \{(1,-1,-1,-1),\ (-1,2,1,1),\ (-1,1,2,1),\ (-1,1,1,2)\}$ es una base de Jordan para T. Hallar una fórmula explícita para $T(x, y, z, t)$.

iii. Sean

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = QCQ^{-1}.$$

Probar que $J^n = \mathrm{Id} + nC$ y siendo A la matriz asociada a T en la base canónica, deducir que $A^n = \mathrm{Id} + nD$.

iv. Hallar una fórmula explícita para $T^n(x, y, z, t)$, $n = 0, 1, \dots$.