

Facultad de Ciencias  
Centro de Matemática  
Exámen de Álgebra Lineal II  
10/6/1998

1. (a) Sea  $\phi : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  definida por

$$\phi(x, y, z, t) = (5x + y + z + t, 5y, 5z, 5t), \quad x, y, z, t \in \mathbb{C}$$

- i. Hallar la forma de Jordan de  $\phi$ .
- ii. Hallar una base de Jordan para  $\phi$ .

- (b) Sea  $\psi : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  que verifica:

$$\psi^2 - 10\psi = -25\text{Id}, \quad \psi^2 - 4\psi \neq 5\text{Id}, \quad \dim \{x \in \mathbb{C}^4 : \psi(x) = 5x\}.$$

Hallar la forma de Jordan de  $\psi$ .

- (c) ¿Puede ser  $\phi = \psi$ ? Justificar la respuesta.

2. (a) Sea  $\langle, \rangle : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$\langle (a, b, c), (d, e, f) \rangle = a\bar{d} + (a - b + c)\overline{(d - e + f)} + (a + c)\overline{(d + f)}.$$

- i. Probar que  $\langle, \rangle$  es un producto interno en  $\mathbb{C}$ .
- ii. Hallar una base de  $\mathbb{C}^3$  que sea ortonormal respecto a este producto interno.

Sea  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  definida por

$$T(x, y, z) = (ix, 2x - y + 2z, x(1 - i) + z).$$

- i. Hallar valores propios y subespacios propios.
- ii. Probar que  $T$  es normal.
- iii. Hallar la descomposición espectral de  $T$ .

- (b) ¿Es  $T$  autoadjunta? ¿Es  $T$  una isometría?

- (c) Sea  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$F(v) = \langle T(v), (i, 3, 2 - i) \rangle,$$

encontrar  $w_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $F(v) = \langle v, w_0 \rangle$  para todo  $v \in \mathbb{C}$ .

3. Sea  $V$  un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita  $n > 1$ . Consideremos  $\text{Bil}_S(V) = \{\phi : V \times V \rightarrow k : \phi \text{ es una forma bilineal simétrica}\}$ . Para cada  $\phi \in \text{Bil}_S(V)$  se define

$$A_\phi := \{T \in L(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v), \forall u, v \in V\}.$$

Probar que para toda  $\phi \in \text{Bil}_S(V)$  se cumple:

- (a) Si  $S, T \in A_\phi$ , entonces  $S \circ T \in A_\phi$ .
- (b)  $A_\phi \subset \{T \in L(V) : T \text{ invertible}\}$  si y solo si  $\phi$  es no degenerada.
- (c) Si  $\phi$  es no degenerada y  $T \in A_\phi$  entonces  $T^{-1} \in A_\phi$ .
- (d) Si  $k = \mathbb{R}$  y  $\phi$  es definida positiva, sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  que verifique  $\phi(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$ . Probar que  $A = [T]_B$  para alguna  $T \in A_\phi$  si y solo si  $A$  es ortogonal.