Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Examen de Álgebra Lineal II
6/2/1998

1. Sean
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
y $B \in M_4(\mathbb{R})$ que verifica:
   (a) $(B-2I)^2(B-3I)^2 = 0$.
   (b) $\text{rango}(B-3I) = 4$.
   (c) $B \neq 2I$.
   (d) B no es semejante con A.

   Se pide:
   (a) Hallar la forma de Jordan de A y la de B.
   (b) Hallar una matriz $C \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $C^{-1}AC$ sea la forma de Jordan de A.

2. Se considera $\mathbb{C}^n$ con el producto interno usual; a los vectores de $\mathbb{C}^n$ los escribimos en forma de columna.
   (a) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz *hermitiana*. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
      i. A verifica $\langle Ax, x\rangle > 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq 0$.
      ii. Todos los valores propios de A son reales positivos.
      iii. Existe $\alpha > 0$ tal que $\langle Ax, x\rangle \geq \alpha\,||x||^2,\ \forall x \in \mathbb{C}^n$.

      (Sugerencia: probar $2(a)i \Rightarrow 2(a)ii \Rightarrow 2(a)iii \Rightarrow 2(a)i$, para $2(a)ii \Rightarrow 2(a)iii$ ver que existe B base ortonormal de vectores propios de ϕ_A y escribir x en función de B.)

(b) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & i & 0 \\ -i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

i. Probar que A esta en las hipótesis de la parte anterior.

ii. Hallar la descomposición espectral de ϕ_A dando explícitamente las proyecciones.

3. (a) Sea η una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^n$ y A su matriz asociada en la base canónica. Sean λ_1 y λ_2 dos valores propios distintos de A y V_{λ_1} y V_{λ_2} los subespacios propios correspondientes de ϕ_A. Probar:

i. Si $x \in V_{\lambda_1}$ e $y \in V_{\lambda_2}$ entonces $\eta(x, y) = 0$.

ii. Si además $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ entonces η es definida positiva en $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$.

(b) Se considera la forma cuadrática ψ de $\mathbb{R}^4$ que tiene por matriz asociada en la base canónica a

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se pide:

i. Hallar rango y signatura de ψ.

ii. Hallar un subespacio de dimensión máxima W de $\mathbb{R}^4$ tal que ψ sea definida positiva en W (dar una base de W).

Nota: se recuerda que si $A \in M_n(k)$, entonces $\phi_A : k^n \to k^n$ es la transformación lineal definida por $\phi_A(x) = Ax,\ \forall x \in k^n$.