Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Exámen de Álgebra Lineal II
5/12/1997

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ -10 & -3 & 10 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

   (a) Probar que A es diagonalizable.

   (b) Hallar $Q \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $Q^{-1}AQ$ sea diagonal.

2. Sea $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ base de $\mathbb{C}^3$. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ un operador lineal definido por

$$T(x,y,z) = (2x + 3y + (i-5)z, 5y + (i-5)z, iz).$$

   (a) i. Hallar $[T]_B$.

   ii. Probar que existe algún producto interno en $\mathbb{C}^3$ con el cual T es normal. Hallarlo.

   iii. ¿Existe algún producto interno en $\mathbb{C}^3$ tal que T sea autoadjunto? Justificar.

   (b) Sea $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ definido por

$$\langle (a,b,c),(a',b',c') \rangle = (a-b)(\overline{a'-b'}) + (b-c)(\overline{b'-c'}) + c\,\overline{c'}.$$

   i. Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno.

   ii. Sea $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ definido por

$$F(a,b,c) = \langle T(a,b,c),(1,2,3) \rangle.$$

   Hallar $w_0 \in \mathbb{C}^3$ tal que $F(v) = \langle v, w_0 \rangle$ para todo $v \in \mathbb{C}^3$.

3. (a) Sea $A \in M_n(k)$ invertible. Probar:

   i.
   $$\chi_{A^{-1}}(t) = (-1)^n (\det A)^{-1} t^n \chi_A(t^{-1}).$$
   (Sugerencia: probar que $(-t)A^{-1}(A - t^{-1}I) = (A^{-1} - tI)$.)

   ii. Si
   $$\chi_A(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (t - \lambda_i)^{n_i},$$
   entonces
   $$\chi_{A^{-1}}(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (t - \lambda_i^{-1})^{n_i}.$$

   iii. Si
   $$\mathrm{m}_A(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \cdots + a_1 t + a_0,$$
   entonces $a_0 \neq 0$, y
   $$\mathrm{m}_{A^{-1}}(t) = t^k + \frac{a_1}{a_0}t^{k-1} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{a_0}t + \frac{1}{a_0} = a_0^{-1} t^k \,\mathrm{m}_A(t^{-1}).$$

   (b) Sea $B \in M_n(k)$ tal que
   $$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \neq 0.$$

   i. Hallar $\chi_{B^{-1}}(t)$ y $\mathrm{m}_{B^{-1}}(t)$.

   ii. Hallar la forma de Jordan de B^{-1}.

   (c) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
   $$\varphi(x, y, z) = (4x + y, 5y + z, -y + 3z).$$
   Probar que φ es invertible, y hallar la forma de Jordan de φ^{-1}.