Centro de Matemática. 6 de julio de 2007

Examen de Algebra Lineal I

1. Sea Π el plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene al punto $P = (1, -2, 0)$ y a la recta:

$$s) \begin{cases} x = 3 \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

   (a) Hallar $r \perp \Pi$ tal que r pasa por el punto $Q = (-2, 2, -4)$.
   (b) Probar que r es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Hallar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(r) \neq \{0\}$ y $\dim(Im(T)) = 1$. ¿Es única una tal T?
   (d) Hallar la matriz asociada a T de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.
   (e) Mostrar que para toda $S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ lineal se tiene que $S \circ T$ no es sobreyectiva.
   (f) Hallar una base de $\frac{\mathbb{R}_2[x]}{Im(T)}$.

2. Sea $T : \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ tal que:

$$T\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_4 & 0 \\ 0 & a_2 + a_3 \end{pmatrix}$$

   (a) Hallar $A =_{\mathcal{C}} [T]_{\mathcal{C}}$ siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.
   (b) Probar que $T^2 = T^3$.
   (c) Calcular $\det(A)$.
   (d) Dar una base de $N(T) + Im(T)$ e investigar si la suma es directa.
   (e) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $S : V \to V$ una transformación lineal tal que $S^2 = S^3$. Probar que si S es invertible entonces $\det({}_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}) = 1$ para cualquier base $\mathcal{B}$ de V. Dar un ejemplo en el que esto suceda.

3. Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el espacio vectorial de las sucesiones de números reales con las operaciones habituales, y sea $\sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $\sigma(\{x_1, x_2, x_3, ...\}) = \{x_2, x_3, x_4, ...\}$.

   (a) Probar que σ es lineal y sobreyectiva.
   (b) Dar una base de $N(\sigma)$.
   (c) i. Demostrar que $\frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{N(\sigma)} \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
       ii. Demostrar que esto no puede suceder en dimensión finita, es decir, demostrar que si V es un espacio vectorial de dimensión finita y W es un subespacio de V no nulo se tiene que $\frac{V}{W} \ncong V$.
   (d) i. Hallar $\tau : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $\sigma \circ \tau = Id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.
       ii. Probar que no existe $\Psi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $\Psi \circ \sigma = Id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.