

1. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ fijo y $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$. Consideramos el morfismo de anillos $\varphi : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $\varphi(p) = p(\zeta)$, $\forall p \in \mathbb{Q}[X]$.
- a) Probar que $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$. Deducir que existe un único polinomio mónico $\Phi_n \in \mathbb{Q}[X]$ tal que para todo $p \in \mathbb{Q}[X]$ se verifica que $p(\zeta) = 0$ si y solo si Φ_n divide a p .
 - b) Probar que Φ_n es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ y que Φ_n divide a $X^n - 1$.
 - c) Hallar Φ_n para los siguientes valores de n : 1; 2; 3; 4; p primo; $2p$, con $p > 2$ primo.

2. Sea A un anillo, $e \in A$ un idempotente y $M \in {}_A\mathcal{M}$.
- a) Probar que el conjunto $eAe = \{eae : a \in A\}$ es cerrado respecto a la suma y producto de A y deducir que con estas operaciones eAe es un anillo con e como elemento identidad.
 - b) Probar que el conjunto $e \cdot M = \{e \cdot m : m \in M\}$ es cerrado respecto a actuar con elementos de eAe y deducir que con esta acción es $e \cdot M \in {}_{eAe}\mathcal{M}$.
 - c) Observar que $\text{Hom}_A(Ae, M) \in {}_{eAe}\mathcal{M}$ definiendo

$$(a \cdot \varphi)(x) = \varphi(xa), \quad \forall a \in Ae, \varphi \in \text{Hom}_A(Ae, M), x \in Ae.$$

Probar que el mapa $\theta_M : \text{Hom}_A(Ae, M) \rightarrow e \cdot M$ definido por $\theta_M(\varphi) = \varphi(e)$, es un isomorfismo en ${}_{eAe}\mathcal{M}$.

- d) Observar que $eA \in {}_{eAe}\mathcal{M}_A$ con las acciones a derecha e izquierda dadas por la multiplicación en A . Probar que existe $\alpha_M : eA \otimes_A M \rightarrow e \cdot M$ morfismo en ${}_{eAe}\mathcal{M}$ que verifica $\alpha_M(x \otimes m) = x \cdot m$, $\forall x \in eA, m \in M$.
 - e) Probar que α_M es un isomorfismo.
3. Sea A un anillo.

- a) Probar que si $M, N, P \in {}_A\mathcal{M}$ y $\varphi : M \rightarrow N, \beta : P \rightarrow N$ son morfismos que verifican que φ es inyectivo y $\text{Im} \beta \subset \text{Im} \varphi$, entonces existe un único morfismo $\alpha : P \rightarrow M$ tal que $\varphi \circ \alpha = \beta$.
- b) Si $R, S, P \in {}_A\mathcal{M}$ y $\eta : R \rightarrow S$ es un morfismo, definimos $\eta_* : \text{Hom}_A(P, R) \rightarrow \text{Hom}_A(P, S)$ por $\eta_*(\gamma) = \eta \circ \gamma$.

Probar que si $P \in {}_A\mathcal{M}$ y

$$S : 0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} Q$$

es una sucesión exacta en ${}_A\mathcal{M}$, entonces

$$S' : 0 \rightarrow \text{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{\varphi_*} \text{Hom}_A(P, N) \xrightarrow{\psi_*} \text{Hom}_A(P, Q)$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

- c) En las mismas hipótesis de la parte anterior, se supone ahora que P es libre en ${}_A\mathcal{M}$. Probar que si S es una sucesión exacta corta en ${}_A\mathcal{M}$, entonces S' es una sucesión exacta corta de grupos abelianos