Álgebra I

Segundo semestre de 2002

Examen 28/02/03

1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, consideramos el anillo $\mathbb{K}[x,y]$.
   (a) Dado $p(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$, probar que existen $q(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ y $a(x),\ b(x) \in \mathbb{K}[x]$ únicos tales que $p(x,y) = \left(x^3 - y^2\right) q(x,y) + a(x) + b(x)y$.
   (b) Probar que el mapa $\phi : \mathbb{K}[x,y] \to \mathbb{K}[t]$ definido por $\phi(p(x,y)) = p\left(t^2, t^3\right)$ es un morfismo de anillos.
   (c) Hallar el núcleo de ϕ (es decir hallar generadores del mismo).
   (d) Hallar explícitamente la imagen de ϕ.
   (e) Probar que $x^3 - y^2$ es irreducible en $\mathbb{K}[x,y]$. Deducir que la imagen de ϕ es un dominio.

2. Sea A un anillo (no necesariamente conmutativo) con unidad. Un A-módulo M no nulo se dice simple si no admite submódulos no triviales (i.e. si $N \subset M$ es un submódulo, entonces $N = \{0\}$ o $N = M$).
   a. Probar que si N, M son dos A-módulos simples, entonces un morfismo $\varphi : N \to M$ o bien es nulo o bien es un isomorfismo.
   b. Deducir que si M_i, $i = 1, \ldots, n$, son módulos simples, y N es un módulo simple no isomorfo a M_i, $i = 1, \ldots, n$, entonces un morfismo $\varphi : N \to \prod_{i=1}^n M_i$ es necesariamente nulo.
   c. En las mismas hipótesis de b), probar que todo morphismo $\bigoplus_{i=1}^n M_i \to N$ es necesariamente nulo.
   d. Probar que todo módulo simple es cíclico.
   e. Hallar un $\mathbb{C}[x]$-módulo cíclico que no sea simple.

3. Sean M, N, P módulos y $\phi : P \to M$, $\psi : P \to N$ morfismos. Se considera S el submódulo de $M \oplus N \oplus P$ generado por el conjunto $\{(\phi(p), 0, -p) \ : \ p \in P\} \cup \{(0, \psi(p), -p) \ : \ p \in P\}$. Sea $Q = (M \oplus N \oplus P)/S$. Definimos los mapas $\tilde{\psi} : M \to Q$ y $\tilde{\phi} : N \to Q$ mediante $\tilde{\psi}(m) = (m, 0, 0) + S$ y $\tilde{\phi}(n) = (0, n, 0) + S$.
   (a) Probar que $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\psi}$ son morfismos que verifican $\tilde{\psi} \circ \phi = \tilde{\phi} \circ \psi$.
   (b) Sea R un módulo cualquiera y $\alpha : M \to R$, $\beta : N \to R$ morfismos que cumplen $\alpha \circ \phi = \beta \circ \psi$. Probar que existe un único morfismo $\theta : Q \to R$ tal que $\theta \circ \tilde{\psi} = \alpha$ y $\theta \circ \tilde{\phi} = \beta$. (Sugerencia: partir de un morphismo $\bar{\theta} : M \oplus N \oplus P \to R$ que induce θ y deducir su fórmula.)
   (c) Sea $\check{Q} = (M \oplus N)/T$, siendo $T = \{(\phi(p), -\psi(p)) \ : \ p \in P\}$. Probar que Q es isomorfo a $\check{Q}$. (Sugerencia: considerar $\alpha : M \to \check{Q}$ y $\beta : N \to \check{Q}$ definidas por $\alpha(m) = (m, 0) + T$ y $\beta(n) = (0, n) + T$.)