

Algebra I

Segundo semestre 2000

Examen 21/12/01

1. Sea M un módulo sobre un anillo R .

- (a) Sean N, P, S submódulos de M tales que N es simple y $P \cap S = \{0\}$. Probar que es $N \subset P + S$ o la suma $N + P + S$ es directa.
- (b) Supongamos que podemos escribir M de la forma $M = \bigoplus_{i=1}^s M_i$, siendo cada M_i un submódulo simple de M . Probar que para cada submódulo S de M existe un submódulo P de M tal que $M = S \oplus P$. (Sugerencia: considerar $P = \bigoplus_{j \in J} M_j$, siendo $J \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal máximo entre los que verifican $S \cap \left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right) = \{0\}$.)
- (c) Sea M como en (1b) y $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ un morfismo sobreyectivo de módulos. Probar que existe un submódulo P de M tal que $\phi|_P : P \rightarrow \tilde{M}$ es un isomorfismo.
- (d) Probar que para $R = M = \mathbf{Z}$ no se verifican las hipótesis de (1b).

2. Sea K un cuerpo.

- (a) Probar que $\langle X \rangle$ es un ideal maximal de $K[X]$. Dar explícitamente un ideal maximal de $K[X]$ distinto de $\langle X \rangle$.
- (b) Probar que si $f \in K[[X]]$, $f \neq 0$, entonces existen $n \in \mathbf{N}$ y $u \in U(K[[X]])$ tales que $f = X^n u$.
- (c) Probar que $K[[X]]$ es un dominio de ideales principales y que sus únicos ideales son $\{0\}$, $k[[X]]$ y $\langle X^k \rangle$, $k \in \mathbf{Z}^+$.