

## Álgebra I

Segundo semestre de 2000

Examen 23/05/01

(1) Se considera el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  y el subconjunto  $I = \{a + b\sqrt{-5} : a \equiv b \pmod{2}\} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ .

(a) Probar que  $I$  es el ideal de  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  generado por  $\{2, 1 + \sqrt{-5}\}$ .

(b) Probar que  $I$  es un ideal maximal de  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ .

(c) Sea  $I^2 = \{\sum_{k=1}^n i_k j_k : i_k, j_k \in I, n \in \mathbb{Z}^+\}$ . Probar que  $I$  es el ideal generado por 2.  
(Observar que  $2 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) + 2(-2)$ .)

(d) Probar que  $I$  no es un ideal principal (usar que 2 es irreducible en  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ).

(2) (a) Sea  $D$  un anillo conmutativo y  $M$  un  $D$ -módulo. Se consideran las siguientes condiciones:

**A:** Para todo  $0 \neq d \in D$  y todo  $m \in M$  se cumple que existe un  $n \in M$  tal que  $m = d \cdot n$ .

**B:** Para todo ideal  $J$  de  $D$  y todo morfismo de  $D$ -módulos  $f : J \rightarrow M$  se cumple que existe un morfismo de  $D$ -módulos  $\hat{f} : D \rightarrow M$  tal que  $\hat{f}(x) = f(x)$  para todo  $x \in J$ .

(i) Si  $D$  es un dominio, probar que **B** implica **A**. (Sugerencia: dados  $0 \neq d \in D$  y  $m \in M$ , ver que existe un morfismo de  $D$ -módulos  $f : \langle d \rangle = dD \rightarrow M$  tal que  $f(d) = m$ .)

(ii) Si  $D$  es un D.I.P., probar que **A** implica **B**.

(b) De ahora en adelante sea  $D = \mathbb{Z}$ . Se consideran los  $\mathbb{Z}$ -módulos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_q$ .

(i) ¿Cuáles de esos módulos verifican **A**?

(ii) De los casos en que se verifique **A**, ¿en cuáles de ellos el “n” es único?

(iii) Probar que si  $M$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo finitamente generado, entonces  $M$  no verifica **A**.

(3) Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo y  $R$  un subanillo de  $\mathbb{K}[X]$  tal que  $\mathbb{K} \subsetneq R \subset \mathbb{K}[X]$ . Se considera

$$n = \min \{\text{gr } f(X) : f(X) \in R \setminus \mathbb{K}\}.$$

Para cada  $j = 1, \dots, n$  sea  $R_j = \{f(X) \in R : \text{gr } f(X) \equiv j \pmod{n}\}$ . Si  $R_j \neq \emptyset$ , se considera un  $f_j(X) \in R_j$  mónico de grado mínimo; si  $R_j = \emptyset$  definimos  $f_j(X) = 0$ .

(a) Probar que  $R = \mathbb{K}[f_1(X), \dots, f_n(X)]$ . (Sugerencia: razonar por el absurdo y llegar a una contradicción tomando  $g(X) \in R \setminus \mathbb{K}[f_1(X), \dots, f_n(X)]$  de grado mínimo.)

(b) Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo y  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Se considera  $R = \{a + X^n p(X) : a \in \mathbb{K}, p(X) \in \mathbb{K}[X]\}$ .

(i) Probar que  $R$  es un subanillo de  $\mathbb{K}[X]$ .

(ii) Hallar explícitamente un conjunto finito  $S$  tal que  $R = \mathbb{K}[S]$ .