Algebra I

Segundo semestre 2000

Examen 23/03/01

1. Sea K un cuerpo de característica 3.

   (a) Probar que $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ para todo $a, b \in K$.

   (b) Sean k el cuerpo primo de K, y $P \in k[X]$, $P = X^3 - X + 2$. Probar que P es irreducible en $k[X]$.

   (c) Sea $\alpha \in K$ una raíz de P. Probar que P tiene todas sus raíces en $k[\alpha]$.

   (d) Probar que $k[\alpha]$ es un cuerpo y hallar su cardinal (Sugerencia: considerar el morfismo $\phi : k[X] \longrightarrow k[\alpha]$ dado por $\phi(Q) = a_0 + a_1\alpha + ... + a_n\alpha^n$, si $Q = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$).

2. Se considera K el submódulo de $\mathbf{Z}^3$ generado por $(0, 3, 0)$ y $(24, 18, 18)$ y $M = \mathbf{Z}^3/K$ el módulo cociente.

   (a) Descomponer M como suma directa de módulos cíclicos.

   (b) Hallar $\mathrm{Tor}(M)$ y $F \subset M$ submódulo libre tal que $M = \mathrm{Tor}(M) \oplus F$.

   (c) Hallar los factores invariantes de M.

3. (a) Sea $\phi : \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{Z}$ una función. Probar que ϕ es un homomorfismo de $\mathbf{Z}$-módulos sii existen enteros m y n tales que $\phi(x, y) = mx + ny$.

   Sea $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. Probar que $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$ si y sólo si existe un homomorfismo de $\mathbf{Z}$-módulos $\phi : \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{Z}$ tal que $\phi(a, b) = 1$.

   (b) Sea $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ tal que $(a, b) \in B$ para alguna base B de $\mathbf{Z}^2$ sobre $\mathbf{Z}$. Probar que $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$.

   (c) Sea $\phi : \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{Z}$ dado por $\phi(x, y) = mx + ny$, donde $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$. Probar que $\{(-n, m)\}$ es una base de $\ker \phi$.

   (d) Probar que si $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$ existe una base B de $\mathbf{Z}^2$ sobre $\mathbf{Z}$ tal que $(a, b) \in B$.