

# Estabilidad Casi Global

Rafael Potrie

17 de marzo de 2007

## Resumen

En este trabajo se pretende hacer una presentación completa de el estudio de la estabilidad casi global desde un punto de vista teórico.

## 1. Introducción

Dada la importancia del segundo teorema de Lyapunov, tanto para el estudio de la estabilidad local como global de puntos de equilibrio de ecuaciones diferenciales; es bueno, al menos cuando se pretenden estudiar propiedades globales de estabilidad, buscar generalizaciones que permitan incluir casos donde si bien la estabilidad no es global, el conjunto de puntos que no converge al origen es pequeño (por ejemplo en el caso de tener otros puntos de equilibrio).

Otro motivo de interés (que no será en el cual se profundice en este trabajo) es el de conseguir métodos más sencillos de tratar con las computadoras. La búsqueda simultanea de funciones de Lyapunov y acciones de control para un sistema dinámico no resulta en general convexo (requerimiento esencial a la hora de buscar algoritmos de programación lineal) y es por eso también de interés encontrar resultados análogos a las funciones de Lyapunov con estas propiedades.

Rantzer en [Ran01] propuso una respuesta a estos problemas. En su trabajo, considera la noción de “estabilidad casi global” y propuso un método dual (utilizando densidades) al segundo método de Lyapunov para asegurar esta noción.

En este trabajo presentaremos los resultados de Rantzer y además estudiaremos resultados posteriores que dan respuestas acerca de preguntas que surgen del trabajo mencionado, en particular acerca de que tan buena es la caracterización con densidades (Teoremas Recíprocos), alternativas más débiles que las densidades (medidas monótonas), dificultades de computabilidad en algunos casos y relaciones con la estabilidad local.

Para eso estudiaremos el trabajo de Rantzer [Ran01], el de Angeli [An03], los de Monzón [Mon03], [Mon05], [Mon04] y el de Monzón-Potrie [MP06].

## 2. Definiciones y presentación de resultados

Trabajaremos siempre con la ecuación diferencial en  $\mathbb{R}^n$  (puede ser todo definido en una variedad cualquiera  $M$ , pero por simplicidad<sup>1</sup> lo haremos en  $\mathbb{R}^n$ ):

$$\dot{x} = f(x) \quad f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad f(0) = 0 \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Es más fácil hacer cuentas en un espacio vectorial. En todo caso, el lector puede pasarlo a variedades usando cartas...

En general,  $\mathbb{R}^n$  será tratado como un espacio de medida con los Borelianos y  $m$  denotará la medida de Lebesgue. Llamaremos  $f^t$  al tiempo  $t$  del flujo generado por (1) y  $\mathcal{R} = \{y \in \mathbb{R}^n : f^t(y) \rightarrow 0 \text{ } t \rightarrow +\infty\}$  denotará la región de atracción.

**Definición 1.** Diremos que  $\rho \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$  no negativa es una *función de densidad* sii  $\frac{\rho f}{\|x\|}$  es integrable en  $B(0, \varepsilon)^c \forall \varepsilon$  y si se cumple que

$$\nabla \cdot (\rho f) > 0 \quad m - \text{c.t.p.} \quad (2)$$

**Definición 2.** Decimos que el origen es *casi globalmente estable* (a.g.s.<sup>2</sup>) si el complemento de la región de atracción del origen tiene medida de Lebesgue nula ( $m(\mathcal{R}^c) = 0$ ).

El teorema que disparó el estudio de este nuevo concepto de estabilidad, se encargó de relacionar estos dos conceptos. Fue introducido en [Ran01]:

**Teorema 1 (Rantzer [Ran01]).** *Si (1) admite una densidad de clase  $C^1$ , entonces, el origen es a.g.s..*

La idea se basa en que el hecho de que pase (2) implica que los conjuntos se mueven por el flujo hacia los lugares donde la densidad es mayor. El hecho de que  $\frac{\rho f}{\|x\|}$  sea integrable lejos del origen, implica que el lugar donde se concentra más densidad es cerca de este.

En definitiva, podemos reformular el teorema en terminos de medidas que crecen con el flujo como fue hecho en [Mon04].

**Definición 3.** Decimos que una medida de Borel  $\mu$  es una *medida monótona* sii  $m \ll \mu$ ,  $\forall \varepsilon > 0$   $\mu(B(0, \varepsilon)^c) < +\infty$  y vale que  $0 < \mu(Y) < +\infty$  implica que

$$\mu(f^t(Y)) > \mu(Y) \quad \forall t > 0$$

Esta definición permite reformular el teorema de Rantzer de la siguiente manera<sup>3</sup>:

**Teorema 2.** *Si (1) admite una medida monótona entonces, el sistema es a.g.s..*

En [Ran01] se prueba que la búsqueda simultanea de densidades y acciones de control es efectivamente convexa a diferencia del caso de las funciones de Lyapunov. Esto, como ya fue mencionado tiene grandes aplicaciones ya que facilita la creación de algoritmos que permitan que las computadoras se encarguen de la búsqueda.

Sin embargo, veremos que no siempre será tan fácil encontrar densidades con la ayuda de la computadora. Esto será consecuencia de un resultado de Angeli en [An03] que prueba el siguiente teorema<sup>4</sup> que muestra como la tarea de encontrar densidades puede ser sumamente compleja a pesar de la convexidad:

**Teorema 3.** *Si  $\nabla \cdot f(x) < 0$  en un conjunto abierto  $U$  y  $x_e \neq 0$  es un punto de equilibrio en  $U$  y  $S$  es su variedad estable. Si  $\exists \rho \in C^1$  no negativa y tal que  $\nabla \cdot (\rho f) > 0$   $m - \text{c.t.p.}$  entonces,  $\rho(x) = 0$  para todo  $x$  que pertenezca a  $S \cap U$  y cuya órbita futura se mantenga contenida en  $U$ .*

<sup>2</sup>La abreviatura proviene del inglés, *almost globally stable*.

<sup>3</sup>Veremos que la demostración se aplica a ambos casos. De hecho, la demostración para densidades  $C^1$  implica pasar por demostrar que la densidad genera una medida monótona.

<sup>4</sup>El teorema fue levemente modificado ya que menos hipótesis son necesarias para llevar a cabo la prueba que propone Angeli.

Como mencionamos, este teorema dificulta la búsqueda de densidades pues la variedad estable de un punto de equilibrio puede ser sumamente complicada. Sin embargo, no cualquier punto de equilibrio tendrá divergencia negativa (las singularidades con divergencia negativa cumplen que atraen más de lo que repelen, y no hay que olvidarse que la existencia de una densidad asegura que el origen atrae casi todo) y existiendo dicho punto, es posible que el abierto  $U$  donde la divergencia es negativa sea pequeño y por ende la componente conexa de  $S \cap U$  que contiene al equilibrio también, evitando los problemas antes mencionados para conseguir una densidad.

Por último, estudiaremos resultados recíprocos y otros resultados que vinculan la a.g.s. con la estabilidad asintótica local (l.a.s.<sup>5</sup>) que aparecen en [Mon03], [Mon05], [Mon04] y [MP06].

**Teorema 4** ([Mon03], [MP06]). *Sea  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  con  $f(0) = 0$  un sistema dinámico a.g.s. completo para el cual el origen es un punto de equilibrio l.a.s.. Entonces, si  $n \neq 4, 5$  entonces existe una densidad diferenciable cuya derivada es continua en  $\mathcal{R}^c$ . Si el equilibrio es exponencialmente estable (por ejemplo, si el jacobiano es Hurwitz) entonces, el teorema vale para cualquier dimensión.*

Este resultado incluye resultados de todos los artículos mencionados, el enunciado que presentamos es la versión que se encuentra en [MP06].

Otra relación entre la casi estabilidad global y la estabilidad asintótica local nos permitirá concluir que la hipótesis de estabilidad local es necesaria en el teorema anterior.

**Teorema 5** ([MP06]). *1. Si  $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$  tiene un valor propio  $\lambda$  con  $Re(\lambda) > 0$  entonces  $m(\mathcal{R}) = 0$ .*  
*2. Si  $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$  tiene un valor propio  $\lambda$  con  $Re(\lambda) < 0$  y admite una densidad que es  $C^1$  en un entorno del origen entonces es l.a.s.*

Este teorema entre otras cosas apunta a generalizar un resultado de [Mon04] que vincula la a.g.s. con la l.a.s. en sistemas bidimensionales. La prueba de ese resultado se basa fuertemente en el Teorema de Poincaré Bendixon. También estudiaremos en este trabajo algunas generalizaciones de la teoría de Poincaré Bendixon a dimensiones mayores.

Si se juntan los teoremas 1, 4 y 5 obtenemos un resultado importante vinculando las propiedades locales y globales que son implicadas por una densidad y como ellas aseguran su existencia al mismo tiempo. Es decir, bajo ciertas condiciones, encontramos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de densidades, que son prometedoras en el sentido que aseguran no solo a.g.s. sino también l.a.s. (en definitiva, eliminando la estabilidad asintótica global, nada puede ser más deseable, la ventaja, es que a.g.s. + l.a.s. es mucho más general que estabilidad global, como se verá en algunos ejemplos).

**Teorema 6.** *Consideremos la ecuación (1) y asumamos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$  tiene un valor propio  $\lambda$  tal que  $Re(\lambda) < 0$ . Entonces:*

$$\text{Existe una densidad } \rho \Leftrightarrow (1) \text{ es a.g.s. y l.a.s.}$$

Además, en [MP06], se demuestra que la condición de tener un valor propio negativo es necesaria para probar este teorema, pues se presenta un ejemplo de un sistema que admite una densidad, pero no es localmente asintóticamente estable (sin embargo es localmente estable, continua abierto saber si la existencia de una densidad implica la estabilidad local del sistema).

---

<sup>5</sup>Del inglés *local asymptotical stability*

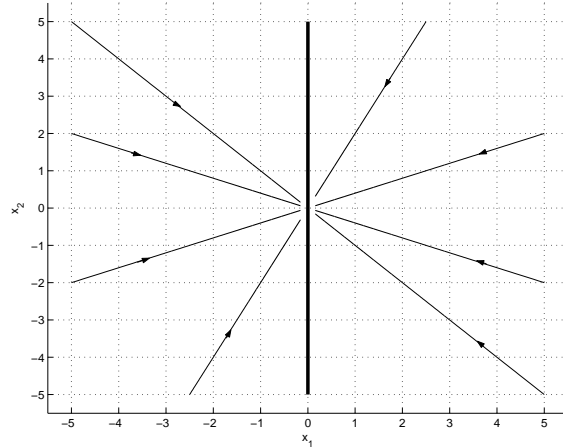


Figura 1: *Ejemplo 2*

### 3. Ejemplos

*Ejemplo 1.* El primer y más trivial ejemplo es el de un sistema globalmente asintóticamente estable. Por ejemplo, el clásico

$$\dot{x} = -x$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ . Si bien es trivial, este ejemplo será de utilidad, sobre todo pues admite muchas densidades. Una en particular puede ser  $\rho = \|x\|^{-\alpha}$ .

*Ejemplo 2.* El siguiente ejemplo es similar al anterior ya que las trayectorias son las mismas exceptuando las que se encuentran en la recta  $x = 0$  que es fija.

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x^3 \\ \dot{y} &= -yx^2 \end{cases}$$

Si bien no es l.a.s. (por tener una línea de puntos fijos) es sencillo observar que es a.g.s. además de ser localmente estable. No es difícil ver, que la función  $\rho = (x^2 + y^2)^{-3}$  funciona como densidad para este sistema observando que

$$\nabla \cdot (\rho f) = 6(x^2 + y^2)^{-4}(x^4 + x^2y^2) - 4(x^2 + y^2)^{-3}x^2 = 2(x^2 + y^2)^{-3}x^2 > 0 \quad c.t.p.$$

*Ejemplo 3.*

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= 2xy \end{cases}$$

Este ejemplo corresponde al campo dado en el plano complejo por asignarle a cada punto el vector correspondiente a elevarlo al cuadrado (en los complejos). Lo interesante de este ejemplo, es que si bien casi toda órbita converge en el futuro al origen, este no es ni siquiera localmente estable puesto que con condiciones iniciales de la forma  $(1/n, 0)$  la ecuación es de la forma  $\dot{x} = x^2$  por lo cual los puntos se van a infinito.

Las trayectorias se pueden ver en la figura 2.

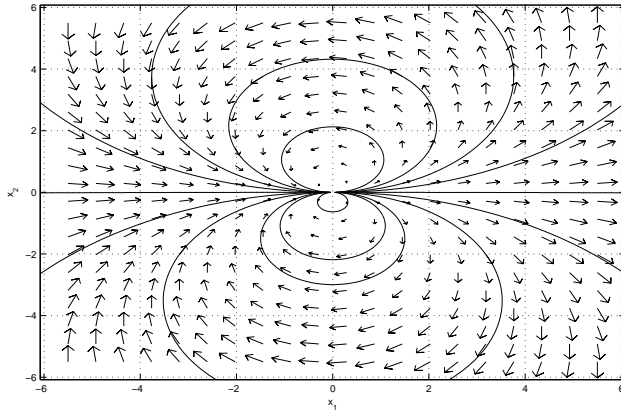


Figura 2: Ejemplo 3

Ejemplo 4.

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= 2xy \\ \dot{z} &= -z \end{cases}$$

Este ejemplo es igual al anterior solo que se le agrega una dirección contractiva. Se verá más adelante como es una importante fuente de contraejemplos.

Ejemplo 5. Otro ejemplo interesante es el siguiente, presentado por Rantzer en [Ran01] en el cual se muestra un sistema *a.g.s.* y *l.a.s.* pero que no resulta ser globalmente asintóticamente estable. Esto se debe a la existencia de otros puntos de equilibrio. La ecuación es la siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x + x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= -6y + 2xy \end{cases}$$

Esta ecuación resulta ser una perturbación local del ejemplo 3 pues se le agrega una componente lineal que va a ser predominante en un entorno del origen pero despreciable lejos de este (es una componente lineal y el campo en que se perturba es cuadrático). Por lo tanto es claramente *l.a.s.* pues la parte lineal es Hurwitz pero sin embargo no es globalmente estable por la existencia de nuevos puntos fijos (ver figura 3). Una simple cuenta permite verificar que  $\rho = (x^2 + y^2)^{-4}$  sirve como función de densidad para probar la estabilidad casi global. Notese que la densidad no se anula en el complemento de la región de atracción.

Ejemplo 6.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 - 2x_1x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= -x_3^3 \end{cases}$$

Este sistema es un oscilador armónico en el plano  $x_3 = 0$  y las trayectorias son espirales decrecientes para otras condiciones iniciales (ver la figura 4).

Observamos que  $\nabla \cdot f = -7x_3^2$  y que utilizando  $\rho = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-4}$  tenemos  $\nabla \cdot (\rho f) = x_3^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-4}$  que efectivamente es positiva en casi todo  $\mathbb{R}^3$  por lo cual el sistema es *a.g.s.*. No es difícil probar la estabilidad local del origen, pero sin embargo, dado que en el plano  $x_3 = 0$  el sistema se comporta como un oscilador armónico, se deduce que el sistema no es localmente asintóticamente estable. Este ejemplo

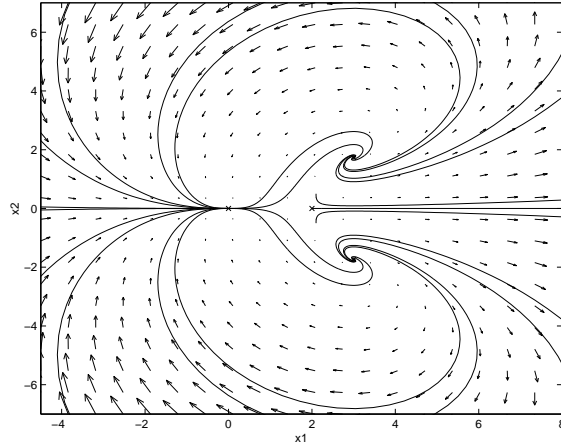


Figura 3: *Ejemplo 5*

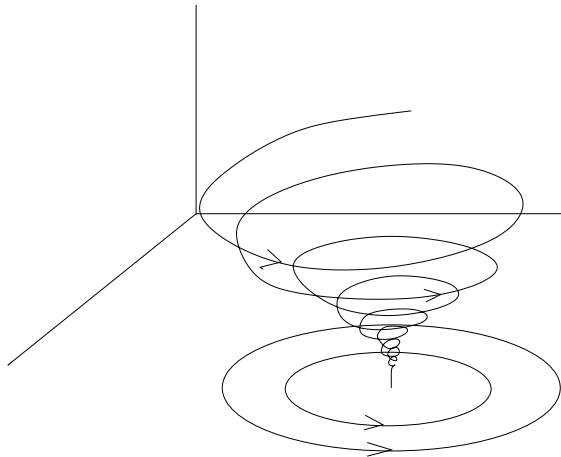


Figura 4: *Una trayectoria del sistema 9*

es de [MP06] y resulta interesante pues sin poseer propiedades patológicas (por ejemplo puntos fijos acumulando en el origen) es un ejemplo en donde hay estabilidad casi global pero sin embargo no se pueden asegurar fuertes propiedades de estabilidad local incluso teniendo una función de densidad.

## 4. Teorema de Rantzer

En esta sección probaremos el teorema de Rantzer.

**Teorema 7 (Rantzer).** *Sea  $\dot{x} = f(x)$  con  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  y  $f(0) = 0$  y supongamos que existe una función  $\rho \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$  no negativa tal que  $\frac{\rho(x)f(x)}{\|x\|}$  es integrable en  $B(0, \varepsilon)^c \forall \varepsilon > 0$  y se cumple que*

$$\nabla \cdot (\rho f)(x) > 0 \quad m - c.t.p.$$

*Entonces, si  $\mathcal{R} = \{y \in \mathbb{R}^n : f^t(y) \rightarrow 0 \text{ } t \rightarrow +\infty\}$  se cumple que  $m(\mathcal{R}^c) = 0$ .*

Antes de probar este teorema, vamos a probar una versión en tiempo discreto que viene a ser una versión para medidas monótonas del teorema de recurrencia de Poincaré. Es importante notar que la versión no hace referencia a la diferenciabilidad de la densidad.

**Teorema 8.** *Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida y  $T : X \rightarrow X$  una transformación medible. Sea  $P \subset X$  un conjunto de medida finita y  $Z = \{x \in P : T^n(x) \in P \text{ para infinitos valores de } n \geq 0\}$ . Entonces, si  $\mu$  verifica que*

$$\mu(T^{-1}(Y)) \leq \mu(Y) \quad \forall Y \in \mathcal{A}$$

*se cumple que  $\mu(T^{-1}(Z)) = \mu(Z)$ .*

DEMOSTRACIÓN . Primero notamos que

$$Z = P \cap \left( \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{k=j}^{+\infty} T^{-k}(P) \right)$$

que prueba que  $Z$  es medible además de darnos información de como es  $Z$ .

Ahora, la demostración lleva un poco de trabajo. Si  $R = \{x \in X : T^n(x) \in P \text{ para infinitos valores de } n \geq 0\}$  tenemos que  $R$  es invariante y que  $Z = P \cap R$  (a primera vista uno podría intentar demostrar que  $R$  cumple la tesis del teorema que resulta trivial).

Desde el punto de vista probabilístico, el resultado tiene sentido. ¿Qué diferencia hay entre los puntos que estan en  $P$  y volverán infinitas veces con los puntos que van a caer en  $P$  en el siguiente iterado y volverán infinitas veces?. Sin embargo, la prueba no es tan directa e involucra aplicar una estrategia típica de teoría de la medida.

Ya tenemos que  $\mu(T^{-1}(Z)) \leq \mu(Z)$  por hipótesis. Para ver la otra desigualdad, antes que nada observemos que  $Z \in \bigcup_{k \geq 1} T^{-k}(Z)$  pues todo elemento de  $Z \subset P$  tiene que volver a  $P$  por definición y como vuelve a  $P$  infinitas veces, volverá a pertenecer a  $Z$  ( $Z = P \cap R$  y  $R$  es invariante, entonces, si  $x \in Z$ , como  $T^k(x) \in R \forall k$  cuando  $T^k(x) \in P$  con  $k \geq 1$  se cumplirá que  $T^k(x) \in Z$ ).

Definamos entonces  $Z_n = \bigcup_{k=1}^n T^{-k}(Z)$  que por lo que comentamos  $Z_n \cap Z \uparrow Z$ .

Probemos por inducción que

$$\mu(T^{-1}(Z)) \geq \mu(Z_n \cap Z) + \mu(T^{-n-1}(Z) \cap Z_n^c)$$

Para  $n = 1$  se cumple pues

$$\begin{aligned}\mu(T^{-1}(Z)) &= \mu(T^{-1}(Z) \cap Z) + \mu(T^{-1}(Z) \cap Z^c) \geq \\ &\geq \mu(Z_1 \cap Z) + \mu(T^{-1}(T^{-1}(Z) \cap Z^c)) = \mu(Z_1 \cap Z) + \mu(T^{-2}(Z) \cap Z_1^c)\end{aligned}$$

Ahora, si asumimos que vale para  $n$ ,<sup>6</sup>

$$\mu(T^{-1}(Z)) \geq \mu(Z_n \cap Z) + \mu(T^{-n-1}(Z) \cap Z_n^c) = \mu(Z_n \cap Z) + \mu(T^{-n-1}(Z) \cap Z_n^c \cap Z) + \mu(T^{-n-1}(Z) \cap Z_n^c \cap Z^c) \geq$$

$$\geq \mu((Z_n \cup (T^{-n-1}(Z) \cap Z_n^c)) \cap Z) + \mu(T^{-n-2}(Z) \cap T^{-1}((Z_n \cup Z)^c))$$

y recordando que  $(Z_n \cup (T^{-n-1}(Z) \cap Z_n^c)) \cap Z = Z_{n+1}$  y que  $T^{-1}((Z_n \cup Z)^c) = T^{-1}(Z_n \cup Z)^c = Z_{n+1}^c$  tenemos que

$$\mu(T^{-1}(Z)) \geq \mu(Z_{n+1} \cap Z) + \mu(T^{-n-2}(Z) \cap Z_{n+1}^c)$$

Para concluir, tenemos que

$$\mu(T^{-1}(Z)) \geq \sup_n \mu(Z \cap Z_n) = \mu(Z) \geq \mu(T^{-1}(Z))$$

□

Vamos a probar ahora el teorema de Rantzer, asumiendo que si  $\rho$  es una densidad, entonces, la medida  $\mu$  definida de forma tal que  $\mu(E) = \int_E \rho$  es monótona. Observamos, que la prueba no utilizará en ningún momento que  $\rho$  es diferenciable, ni siquiera que  $\mu$  es absolutamente continua.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE RANTZER.

Reparametrizando  $f$ , podemos suponer que  $\frac{f}{\|x\|}$  acotado (es decir que la ecuación es completa) y  $\rho$  integrable en los conjuntos que no tienen al origen como punto de acumulación<sup>7</sup>.

La idea es usar el teorema anterior teniendo que la condición  $\nabla \cdot (\rho f) > 0$  implica que la medida definida como  $\mu(E) = \int_E \rho$  crece con las trayectorias (como probaremos a continuación).

Consideremos ahora, el tiempo  $\lambda$  del flujo, llamemosle  $T = f^\lambda$ . Entonces, la medida  $\mu$  está en las hipótesis del teorema anterior con la transformación  $T$ .

Como la medida es monótona, salvo que los conjuntos tengan medida 0 o  $+\infty$  el crecimiento es estricto. Por lo tanto, si un conjunto mantiene su medida por  $T$  ha de medir 0 o  $+\infty$ .

La idea entonces, para ver que la mayoría de los puntos van al origen, es considerar los puntos que no lo hacen y ver que son pocos. Consideremos entonces el conjunto  $P_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > r\} = B(0, r)^c$ .

Sabemos que se cumple que  $\mu(P_r) < +\infty$ . Por lo tanto, si definimos  $Z_r^\lambda = \{x \in P_r : T^n(x) \in P_r$  para infinitos valores de  $n \geq 0\}$  como en el teorema anterior, sabemos que como  $Z_r^\lambda \subset P_r$  se cumple que  $\mu(Z_r^\lambda) < +\infty$  pero el teorema anterior nos dice que  $\mu(Z_r^\lambda) = \mu(T^{-1}(Z_r^\lambda))$  lo cual vimos que implica que  $\mu(Z_r^\lambda) = 0$ .

Tenemos entonces que los puntos cuya órbita por  $T$  tiene una subsucesión que no se acerca a más de  $r$  del 0 (en particular no tienden a 0) tiene medida nula. La idea ahora resulta clara, usando que la unión

<sup>6</sup>Recordar que vale  $\mu(A) + \mu(B) \geq \mu(A \cup B)$  y que por hipótesis  $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ .

<sup>7</sup>En definitiva, lo que se hace es que parte de la  $\rho$  multiplique a  $f$  de forma que se reparametricen las soluciones y eso no afecta el resultado pues  $\nabla \cdot (\rho f)$  no se ve afectado pues se mantiene constante  $\rho f$ .

numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula, podemos ver que los que no tienden a 0 por  $T$  tienen medida nula<sup>8</sup>. Si bien el hecho de que  $T^n(x) \rightarrow 0$  no implica que  $f^t(x) \rightarrow 0$ , veremos que lo que probamos alcanza para probar el teorema.

Sea  $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_{1/n}^{1/n}$  que es un conjunto de medida nula por ser unión numerable de conjuntos de medida nula (el argumento que hicimos valía para todo  $r$  y para todo  $\lambda$ ).

Sea  $x \notin Z$ , veamos que  $\lim f^t(x) = 0$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Consideremos  $n$  suficientemente grande de forma tal que si tenemos un punto  $y \in B(0, 1/n)$  entonces  $f^t(y) \in B(0, \varepsilon) \forall t \in [0, 1/n]$  (este  $n$  existe pues  $\|f\|$  está acotado en  $B(0, \varepsilon)$ , por lo tanto, podemos considerar  $n$  suficientemente grande de forma tal que  $\frac{1}{n} \max \|f\| < \varepsilon - \frac{1}{n}$  y tendremos lo buscado).

Pero entonces, como  $x \notin Z$ ,  $x \notin Z_{1/n}^{1/n}$  por lo tanto, existe un valor  $k_0$  para el cual se cumple que para todo  $k > k_0$   $f^{k/n}(x) \in B(0, 1/n)$  pero por como elegimos  $n$  se cumple que para todo  $t > \frac{k_0}{n}$  tenemos que  $f^t(x) \in B(0, \varepsilon)$  concluyendo la prueba. □

Ahora, como anunciamos, probaremos como la condición de la divergencia de las densidades implica que la medida inducida es monótona. El Lema a continuación es similar al Lema de Liouville que dice que si la divergencia es nula entonces se preserva la medida.

**Lema 9.** *Sea  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$  con  $D \subset \mathbb{R}^n$  abierto y sea  $\rho \in C^1(D, \mathbb{R})$  integrable en  $D$ . Sea  $Z \subset D$  tal que  $f^\tau(Z) \subset D \forall 0 \leq \tau \leq t$  entonces:*

$$\int_{f^t(Z)} \rho(x) dx - \int_Z \rho(x) dx = \int_0^t \int_{f^\tau(Z)} \nabla \cdot (f\rho)(x) dx d\tau$$

Queda claro, que como las densidades cumplen que  $\nabla \cdot (f\rho)(x) > 0$  c.t.p. vale que la medida inducida por  $\rho$  sea monótona.

DEMOSTRACIÓN .

Si tenemos una función matricial  $C^1$ ,  $M(t)$  tal que  $M(0) = Id$ , se cumple que (denotaremos  $|A| = \det(A)$ ):

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} |M(t)| \right|_{t=0} = \text{traza}(M'(0))$$

Esto se debe a que si  $M(t) = (a_{ij}(t))$  entonces  $|M(t)| = \sum_{\sigma} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ , y por lo tanto, a hacer la derivada, sobreviven únicamente el término  $(a_{11}(t)a_{22}(t) \dots a_{nn}(t))'|_{t=0}$  (pues  $a_{ij}(0) = 0$  si  $i \neq j$ ).

Tenemos que  $(a_{11}(t)a_{22}(t) \dots a_{nn}(t))'|_{t=0} = a'_{11}(0)a_{22}(0) \dots a_{nn}(0) + \dots + a_{11}(0)a_{22}(0) \dots a'_{nn}(0) = a'_{11}(0) + \dots + a'_{nn}(0) = \text{traza}(M'(0))$  pues  $a_{ii}(0) = 1$ .

Sea entonces  $M(t) = \frac{\partial f^t}{\partial x}(z)$ . Tenemos

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial f^t}{\partial x}(x) \right| \right|_{t=0} = \text{traza} \left( \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} f^t(x) \right) \Big|_{t=0} = \text{traza} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right) = \nabla \cdot f(x)$$

Usando esto y recordando que  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \rho(f^t(x)) \right|_{t=0} = \nabla \rho(x) \frac{\partial f^t}{\partial x}(x) \Big|_{t=0} = \nabla \rho(x) \cdot f(x)$  tenemos que si consideramos  $\rho_t(x) = \rho(f^t(x)) \left| \frac{\partial f^t}{\partial x}(x) \right|$  se cumple que

<sup>8</sup>Pues tomamos la unión en  $n$  considerando  $r = 1/n$  y los puntos que no esten en esa unión tienen que tender a 0 pues si no tendieran, tendrían una subsucesión que se aleja más que cierto  $\varepsilon$  del 0.

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \rho_t(x) \right|_{t=0} = \nabla \rho(x) \cdot f(x) + \rho(x) \nabla \cdot f(x) = \nabla \cdot (\rho f)(x)$$

Esto nos permite ver que:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \rho_t(x) \right|_{t=\tau} = \left. \frac{\partial}{\partial h} \left\{ \rho_h(f^\tau(x)) \left| \frac{\partial f^\tau}{\partial x}(x) \right| \right\} \right|_{h=0} = \nabla \cdot (\rho f)(f^\tau(x)) \left| \frac{\partial f^\tau}{\partial x}(x) \right|$$

Entonces, para concluir la prueba, sea  $\chi$  la función característica del conjunto  $Z$  entonces:

$$\begin{aligned} \int_{f^t(Z)} \rho(x) dx - \int_Z \rho(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) \chi(f^{-t}(x)) dx - \int_Z \rho(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(f^t(z)) \chi(z) dz - \int_Z \rho(z) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_t(z) - \rho(z) dz = \int_Z \int_0^t [\nabla \cdot (\rho f)](f^\tau(z)) \left| \frac{\partial f^\tau}{\partial x}(z) \right| d\tau dz = \int_0^t \int_{f^\tau(Z)} \nabla \cdot (f\rho)(x) dx d\tau \end{aligned}$$

Aplicando cambio de variable varias veces. □

## 5. Algunas restricciones

En esta sección presentaremos un resultado de Angeli en [An03] que muestra como, en algunos casos, la tarea de buscar una función de densidad no es tan sencilla a pesar de la convexidad de la búsqueda. Sin embargo, haremos luego algunos comentarios heurísticos acerca de la posibilidad de encontrarse con estas complicaciones<sup>9</sup>.

**Teorema 10.** *Supongamos que  $\nabla \cdot f(x) < 0$  en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  que contiene un equilibrio  $x_e \neq 0$ . Supongamos que  $x_e$  es tipo silla y sea  $S$  su variedad estable. Entonces, si  $\rho$  es una densidad  $C^1$  para  $f$  se cumple que  $\rho(x) = 0$  en cualquier  $x$  que pertenezca a  $S \cap U$  y cuya órbita futura se mantenga contenida en  $U$ .*

DEMOSTRACIÓN . Como  $\rho$  y  $f$  son  $C^1$  y se cumple que  $\nabla \cdot (\rho f) > 0$  c.t.p. entonces:

$$\nabla \cdot (\rho f)(x) \geq 0 \quad \forall x$$

Entonces, usando que

$$\nabla \cdot (\rho f)(x) = \nabla \rho(x) \cdot f(x) + \rho(x) \nabla \cdot f(x)$$

Vemos que evaluando en  $x = x_e$  tenemos que  $\rho(x_e) = 0$  pues tanto  $\nabla \cdot f(x) < 0$ ,  $f(x_e) = 0$  y  $\rho \geq 0$ .

Sea ahora  $y$  que pertenezca a  $S \cap U$  y cuya órbita futura se mantenga contenida en  $U$  y supongamos que  $\rho(y) > 0$  entonces, como  $f^t(y) \rightarrow x_e$  se tiene que cumplir que  $\rho(f^t(y)) \rightarrow 0$  con  $t \rightarrow +\infty$ . Esto implica que en algún punto  $\tilde{y} = f^\tau(y) \in U$  se cumple que  $\rho(\tilde{y}) > 0$  y que  $\left. \frac{d}{dt} (\rho(f^t(y))) \right|_{t=\tau} = \nabla \rho(\tilde{y}) \cdot f(\tilde{y}) < 0$  que no puede ser pues se tendría que (teniendo en cuenta que  $\rho(\tilde{y}) \nabla \cdot f(\tilde{y}) < 0$ )

<sup>9</sup>Angeli trabaja en variedades, cosa que no genera ningún tipo de problema. Sin embargo, para simplificar la visualización y por simplicidad de algunos argumentos, en este trabajo se hace todo en  $\mathbb{R}^n$

$$\nabla \cdot (\rho f)(\tilde{y}) = \nabla \rho(\tilde{y}) \cdot f(\tilde{y}) + \rho(\tilde{y}) \nabla \cdot f(\tilde{y}) < 0$$

□

Si bien, como dijimos, este teorema representa una dificultad a la hora de embarcarse en la búsqueda de funciones de densidad para ecuaciones diferenciales; no significa que en general la dificultad se encuentre presente. En definitiva, si el abierto  $U$  es pequeño o incluso, si el resto de los puntos de equilibrio tienen divergencia positiva (cosa no tan extraña pues al haber un atractor casi global, es natural esperar que el resto de los equilibrios sean “repulsivos”, o que tengan divergencia positiva) la dificultad pasa a ser menor. Sin embargo, no hay que desmerecer el resultado pues, a modo de ejemplo, casi todos los sistemas mecánicos reales (disipativos) tienen divergencia negativa en todos lados, en particular, en presencia de otros equilibrios se estará en las hipótesis del teorema anterior.

## 6. Medidas monótonas

Repetiremos la definición de medida monótona en un contexto un tanto más general.

**Definición 4.** Una medida de Borel  $\mu$  se dice *monótona* si cumple que  $m \ll \mu$  (o sea que  $\mu(A) = 0 \Rightarrow m(A) = 0 \forall A \in \mathcal{B}$ ) y para todo boreliano  $Y$  de medida finita no nula ( $0 < \mu(Y) < +\infty$ ) se cumple:

$$\mu(f^t(Y)) - \mu(Y)$$

tiene signo definido  $\forall t > 0$ . Dependiendo del signo será *monótona* o *monótona decreciente*

En general vamos a trabajar con medidas que crecen con el flujo y por eso utilizamos la nomenclatura explicitada en la definición. Aclaremos también que para eliminar casos triviales asumiremos en general que la medida tiene conjuntos de medida finita. Utilizaremos  $\text{Mon}(f)$  para designar al conjunto de todas las medidas monótonas para  $f$  y omitiremos la mención a la función cuando consideremos que no es necesario mencionarla, de la misma forma, denotaremos como  $\text{Mon}_+(f)$  a las medidas monótonas que crecen con el flujo.  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  denota el conjunto de las medidas de Borel en  $\mathbb{R}^n$  y por el teorema de representación de Riesz sabemos que  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = (C_0(\mathbb{R}^n))^*$ .

Recordamos de la sección 4 que vale el siguiente teorema que motiva el estudio de estas medidas.

**Teorema 11.** *Si existe  $\mu \in \text{Mon}_+(f)$  tal que  $\mu(B(0,r))^c$  es finito para todo  $r > 0$  entonces el conjunto de puntos cuyas órbitas convergen al origen tiene medida total.*

En general resulta más cómodo trabajar con medidas que con densidades excepto por lo que veremos en la sección 9. En particular, como se vió, toda densidad define una medida monótona.

Si bien la noción es más general, no se conocen ejemplos de sistemas que admitan medidas monótonas pero no admitan densidades. Además, probaremos que ambas nociones son equivalentes en presencia de estabilidad asintótica local.

### Algunas propiedades básicas

Primero mostraremos una proposición cuya demostración es prácticamente trivial, pero antes haremos un par de observaciones de gran utilidad (de hecho bastante claves).

*Observación 1.* Los conjuntos de medida de Lebesgue nula son preservados por el flujo. Esto es cierto a pesar de que existan conjuntos de medida nula homeomorfos a conjuntos de medida positiva. Eso se debe a que dichos homeomorfismos no pueden ser regulares, de hecho, es sencillo ver que si el homeomorfismo es difeomorfismo, los conjuntos de medida nula son preservados<sup>10</sup>.

*Observación 2.* Los conjuntos invariantes miden cero o infinito para las medidas monótonas

**Proposición 12.**  $\text{Mon}_+(f)$  es un cono convexo en  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .

DEMOSTRACIÓN . Sean  $\mu, \nu \in \text{Mon}$  y sea  $A$  boreliano tal que  $0 < t\mu(A) + s\nu(A) < +\infty$  con  $t, s \in \mathbb{R}^+$  de lo que se deduce que alguna de las dos es no nula y ambas menores que infinito.

Tenemos entonces que

$$\lambda\mu(A) + (1 - \lambda)\nu(A) < \lambda\mu(f^t(A)) + (1 - \lambda)\nu(f^t(A)) \quad \forall t > 0$$

□

Vamos a presentar una proposición que aparece en [MP06] que muestra como encontrar una medida que provenga de integrar una función a partir de una medida monótona cualquiera.

**Proposición 13.** Sea  $\mu \in \text{Mon}_+$ , si  $\mu = \nu + \lambda$  es la descomposición de la medida  $\mu$  con  $\nu \ll m$ ,  $\lambda \perp m$  entonces  $\nu$  es monótona.

DEMOSTRACIÓN . Existen  $L$  y  $R$  tal que  $\mathbb{R}^n = L \cup R$  y  $\nu(L) = 0$  y  $\lambda(R) = 0$ . Entonces, por la observación acerca de la imagen por el flujo de conjuntos de medida nula tenemos

$$\nu(f^t(L)) = 0 \quad \forall t$$

Entonces dado  $Y$  tal que  $0 < \nu(Y) < \infty$  se tiene que dado  $t$

$$\begin{aligned} 0 < \nu(Y) &= \nu(Y \cap R) = \nu(Y \cap R \cap f^{-t}(R)) = \mu(Y \cap R \cap f^{-t}(R)) < \\ &< \mu(f^t(Y) \cap f^t(R) \cap R) = \nu(f^t(Y) \cap f^t(R)) = \nu(f^t(Y)) \end{aligned}$$

□

Como el teorema de Radon Nikodym nos asegura que si  $\nu \ll m$  se cumple que  $\nu = \int g dm$  con  $g \in L^1(m)$  conseguimos una densidad en  $L^1$  para cualquier sistema que admita una medida monótona.

## “Divergencia” de una medida monótona

Para obtener diferenciabilidad de dicha densidad, habría que conseguir una parecida pero diferenciable. Una posible idea sería perturbarla, pero eso claramente no se puede hacer a la ligera pues la condición es puntual e involucra las derivadas por lo tanto una perturbación cualquiera probablemente haga que la densidad deje de serlo. Ahora trataremos de estudiar el conjunto de puntos donde de alguna manera la perturbación sería amortiguada.

Definimos para  $\mu \in \text{Mon}_+(f)$ :

$$u(t, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(f^t(B(x, r)))}{\mu(B(x, r))}$$

---

<sup>10</sup>Esto vale en condiciones más generales

que está bien definida ya que por ser  $f^t$  un difeomorfismo se tiene que  $\exists c_1(x), c_2(x) > 0$  tal que:

$$B(f^t(x), c_1(x)r) \subset f^t(B(x, r)) \subset B(f^t(x), c_2(x)r) \quad \forall 0 < r < \varepsilon(x)$$

y no solo eso sino que la forma de  $f^t(B(x, r))$  es bastante parecida a medida que decrece  $r$  por lo tanto se puede ver que el límite existe.

Vale también observar que  $u(t, x) \geq 1 \quad \forall t, x$  ya que  $\mu$  es monótona. Ahora consideremos el conjunto:

$$A = \{x : \exists t > 0 / u(t, x) = 1\}$$

Se ve que este conjunto de puntos es el conjunto donde perturbar la función  $g$  puede traer problemas, ya que son los puntos cuya “divergencia” (al menos esa es la idea que interpreto) no es estrictamente positiva.

**Proposición 14.**  $\mu(A) = 0$

DEMOSTRACIÓN .Consideremos los conjuntos

$$A_t = \{x : u(t, x) = 1\}$$

es claro que  $A = \bigcup_{t>0} A_t$ , pero además, como  $\mu$  es monótona, se tiene que si  $t < s$ :

$$\begin{aligned} \mu(B(x, r)) &< \mu(f^t(B(x, r))) < \mu(f^s(B(x, r))) \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 < \frac{\mu(f^t(B(x, r)))}{\mu(B(x, r))} &< \frac{\mu(f^s(B(x, r)))}{\mu(B(x, r))} \Rightarrow 1 \leq u(t, x) \leq u(s, x) \Rightarrow A_s \subset A_t \end{aligned}$$

entonces se cumple que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{1/n}$$

o sea que bastaría probar que  $\mu(A_t) = 0 \quad \forall t > 0$  porque  $A$  es unión numerable de conjuntos de esa forma. Eso se cumple ya que por ser  $\mu$  de Borel, la medida de  $A_t$  es el ínfimo de las medidas de los abiertos que lo contienen, por lo tanto se cumple que

$$\mu(f^s(A_t)) = \mu(A_t)$$

que por ser  $\mu$  monótona, implica que  $\mu(A_t) = 0$  como se quería. □

*Observación 3.* Se cumple que  $m \ll \mu$  por lo tanto también  $m(A) = 0$ .

## Abundancia de medidas monótonas

Teniendo una medida monótona o una densidad, se pueden crear otras de forma no trivial (ya sabemos que por ser un cono convexo podemos multiplicar por un número positivo y obtener otra densidad). Las medidas van a ser las siguientes, dada  $\mu \in \mathcal{M}_{n+}(f)$ , existe  $\lambda$  con densidad  $g = g_0 \in L^1$ , pero es fácil notar que si considero las siguientes medidas  $\lambda_t(E) = \lambda(f^t(E))$  así definidas también son monótonas. Por lo tanto voy a considerar la medida

$$\nu / \nu(E) = \int_E h dm \quad \text{donde} \quad h(x) = \int_0^1 g_t(x) dt$$

**Proposición 15.**  $\nu$  es monótona.

DEMOSTRACIÓN . Sean  $E$  un boreliano y  $s > 0$  entonces por el teorema de Fubini se tiene

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \int_E h dm = \int_E \left( \int_0^1 g_t(x) dt \right) dm = \int_0^1 \left( \int_E g_t(x) dx \right) dt < \\ &< \int_0^1 \left( \int_{f^s(E)} g_t(x) dx \right) dt = \int_{f^s(E)} \left( \int_0^1 g_t(x) dt \right) dm = \int_{f^s(E)} h dm = \nu(f^s(E)) \end{aligned}$$

□

## 7. Casi estabilidad global en el plano

Presentaremos en esta sección un resultado de [Mon05] vinculando la a.g.s. con la l.a.s. en el caso de sistemas planos.

El resultado es en dimensión 2 pues su prueba se basa fuertemente en la teoría de Poincaré-Bendixon. De hecho, mostraremos como un ejemplo presentado en la sección 3 es un contraejemplo en dimensión 3.

La idea es usar que si tenemos una medida monótona, no hay conjuntos acotados (de medida finita no nula) invariantes. Esto unido al teorema de Poincaré-Bendixon nos asegura que si los conjuntos abiertos acotados tienen medida finita no nula entonces todos los puntos tendrán como  $\omega$ -límite alguna singularidad<sup>11</sup>. Esto nos permitirá probar, a partir de las condiciones topológicas del plano (en particular que toda curva cerrada simple separa el plano) que siendo el punto estable, será asintóticamente estable.

**Teorema 16.** *Sea el sistema  $\dot{x} = f(x)$  con  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Si el conjunto de singularidades es discreto y existe  $\mu \gg m$  tal que todo conjunto acotado mide finito y para todo conjunto acotado  $Y$  de medida no nula existe  $t \neq 0$  tal que*

$$\mu(f^t(Y)) \neq \mu(Y)$$

*Entonces, a.g.s. en el origen implica l.a.s.*

DEMOSTRACIÓN . La idea es la siguiente, como mencionamos, el hecho de que los conjuntos acotados varíen su medida implica que los conjuntos invariantes pueden ser, o no acotados, o de medida nula.

Como los abiertos tienen medida no nula ( $\mu \gg m$ ) y se cumple, por estar en el plano, el Teorema de Poincaré-Bendixon ([Kh96]) concluimos que el  $\omega$ -límite de todo punto será una singularidad (cualquier curva cerrada, que es la otra posibilidad de  $\omega$ -límite, encerraría un abierto acotado e invariante lo cual llevaría a un absurdo por la observación ya realizada).

De esto, concluiremos que el origen es asintóticamente estable encontrando, si no lo fuese, un conjunto invariante de medida finita.

Arranquemos por recordar que el teorema de Poincaré-Bendixon asegura que el  $\omega$ -límite de cualquier órbita es una singularidad, una órbita periódica o un conjunto de singularidades unidas por órbitas (recordar que el  $\omega$ -límite es un conjunto conexo si la órbita futura es acotada). Como las últimas dos opciones corresponden a casos donde se encuentran abiertos acotados invariantes concluimos que ha de cumplirse la primera de las opciones.

A partir de esto deducimos que la estabilidad local implica la estabilidad local asintótica dado que como los puntos fijos son aislados, podemos considerar  $\varepsilon$  de forma tal que no haya puntos fijos distintos

<sup>11</sup>Recordar que  $\omega(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists t_n \rightarrow +\infty \ f^{t_n}(x) \rightarrow y\}$

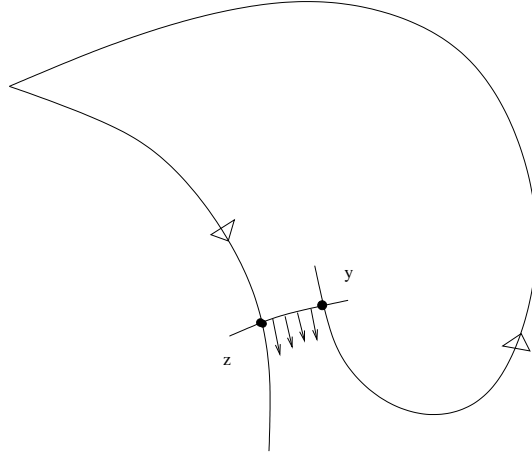


Figura 5: Construcción de región negativamente invariante

del origen en  $\overline{B(0, \varepsilon)}$ . Entonces considerando  $\delta > 0$  de forma tal que los puntos de  $B(0, \delta)$  se mantienen en  $B(0, \varepsilon)$  concluimos que si  $x \in B(0, \delta)$  cumplen que  $f^t(x) \rightarrow 0$  pues su  $\omega$ -límite ha de ser una singularidad (es no vacío pues la órbita es acotada) y estar contenida en  $\overline{B(0, \varepsilon)}$ .

Ahora, supongamos que el origen no es localmente estable, eso implica que existe un  $\varepsilon > 0$  (que podemos considerar tan pequeño como deseemos), una sucesión  $x_n$  con  $\|x_n\| < 1/n$  y otra sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  de forma tal que  $t_n$  es el primer valor de tiempo positivo tal que  $\|f^{t_n}(x_n)\| = \varepsilon$  (es fácil ver que  $t_n$  tiene que tender a  $+\infty$  pues a medida que te acercas al origen el tiempo que se demora en salir se hace cada vez mayor debido a que  $f(0) = 0$ ).

Llamemosle  $z_n = f^{t_n}(x_n)$  y sea  $z$  un punto de acumulación de  $z_n$  (en  $\partial B(0, \varepsilon)$  compacto).

Es sencillo ver que  $f^{-t}(z) \in B(0, 2\varepsilon) \forall t \geq 0$  pues por la continuidad con respecto a las condiciones iniciales dados  $T > 0$  y  $\gamma > 0$  existe  $\nu$  de forma tal que si  $d(z, x) < \nu$  entonces  $d(f^{-t}(z), f^{-t}(x)) < \gamma \forall t \in [0, T]$  entonces, considerando  $\gamma = \varepsilon$  y  $z_n$  muy cercano a  $z$  de forma tal que  $t_n > T$  concluimos lo deseado.

Esto implica que  $\alpha(z) = \{0\}$ <sup>12</sup> pues se puede volver a aplicar Poincaré-Bendixon para el pasado y considerar  $\varepsilon$  suficientemente pequeño de forma tal que el origen sea el único punto fijo en  $\overline{B(0, 2\varepsilon)}$ .

Dado que el sistema es a.g.s. podemos encontrar un punto  $y$  arbitrariamente cercano a  $z$  tal que  $\omega(y) = \{0\}$ . Podemos entonces, construir una región negativamente invariante uniendo la órbita futura de  $y$ , la pasada de  $z$  y una curva transversal al flujo que una  $z$  con  $y$  (esto será una curva de Jordan y separará al plano en dos componentes, una invariante al futuro y otra al pasado) como se ve en la figura 5.

En esa región, hay por lo menos una singularidad (el origen) y alguna singularidad será el  $\alpha$ -límite de muchos puntos (pues en la región acotada hay finitas singularidades). En particular, habrán al menos dos puntos cuyos  $\alpha$ -límites coincidan (sean la misma singularidad) y cuyo  $\omega$ -límite sea el origen (por la a.g.s.). La unión de esas dos órbitas encierra un abierto acotado invariante (ver figura 6) construyendo un absurdo.

□

Recordando de la sección 3 vemos que la ecuación diferencial

<sup>12</sup>Recordar que el  $\alpha$ -límite de un punto es el  $\omega$ -límite del punto tomando el flujo  $f^{-t}$ .

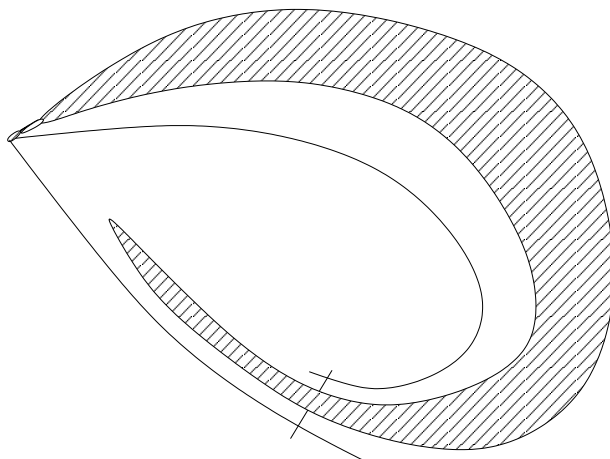


Figura 6: Región invariante acotada

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= 2xy \\ \dot{z} &= -z \end{cases}$$

constituye un contraejemplo en dimensión 3 pues es sencillo observar que la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^3$  cumple con las hipótesis, el sistema es a.g.s. pero hay puntos arbitrariamente cercanos al origen cuya órbita futura diverge (los puntos de la forma  $(1/n, 0, 0)$ , observar que la dinámica en el plano  $z = 0$  es el campo  $z^2$  en el plano complejo).

## 8. Poincaré Bendixon en dimensiones mayores

Esta sección es de alguna manera independiente del resto del trabajo. Aquí, se estudian generalizaciones realizadas en [LM00] y [LM94] al teorema de Poincaré Bendixon para dimensiones mayores. Si bien estas no resultan suficientes para realizar los mismos argumentos que en la sección anterior, consideramos que tiene suficiente interés como para ser agregado al trabajo. De hecho, de estas condiciones se puede derivar un criterio que asegure que toda órbita acotada converga a un equilibrio, lo cual tiene mucho que ver con el resto del trabajo. Sin embargo, enunciar dicho criterio puede ser sumamente complicado y mucho más verificar que se cumple en una ecuación concreta.

### Introducción

El hecho de que en el plano (o en la esfera) valga el teorema de la curva de Jordan, tiene como consecuencia que para que un campo vectorial tenga como soluciones curvas cerradas (pueden ser tanto órbitas periódicas como órbitas homoclínicas u heteroclínicas) debe cumplir que preserve área en esa región. Un corolario de eso se puede expresar de la siguiente forma: Dada  $\dot{x} = f(x)$  que verifica  $\nabla \cdot f \neq 0$  en una región  $A$  podemos asegurar que el flujo dado por la ecuación no tendrá curvas cerradas invariantes totalmente contenidas en  $A$ . Incluso, podemos explotar más esta idea a partir de que si el flujo dado por  $\dot{x} = f(x)$  no tiene curvas cerradas invariantes ningún flujo con las mismas orbitas las tendrá por lo

que (sabiendo que si multiplicamos un campo por una función real positiva no modificamos las orbitas) podremos concluir la no existencia de orbitas periódicas a partir de la siguiente condición:

$$\exists \alpha : A \rightarrow \mathbb{R}^+ \in C^1 \quad \text{tal que } \nabla \cdot (\alpha f) \neq 0$$

Es sencillo observar que está condición es equivalente a que el rotor del campo sea no nulo, pues podemos utilizar el teorema de Stokes en ambos casos para ver que si la curva es invariante entonces el campo alrededor de la curva tiene que ser tangente a esta por lo tanto la integral nula. Este criterio es conocido como el criterio de Bendixon (la segunda formulación en realidad se conoce como criterio de Dulac, ver [Le63]).

No necesariamente estas condiciones se cumplen siempre que no existan curvas cerradas invariantes por el flujo, pero es un criterio muy útil en la práctica que permite sacar interesantes conclusiones teóricas acerca de la estabilidad de ecuaciones diferenciales (por ejemplo, que no haya orbitas periódicas en el plano, tiene como consecuencia que todas las orbitas periodicas tengan como conjunto límite singularidades del campo, ver por ejemplo [MM98] o [Mon05]) esto motiva a buscar generalizaciones a dimensiones mayores que van a tener grandes dificultades dado que el criterio es casi una consecuencia de el teorema de Jordan que vale únicamente para dimensión 2.

La idea de la generalización surge de observar que el criterio en el plano se basa en estudiar como evoluciona el área de una superficie cuyo borde es una curva cerrada dada (en el plano si la curva es invariante no puede variar el área dado que es la única superficie cuyo borde es la curva) si esta es invariante entonces en cierto sentido el conjunto de las superficies cuyo borde es la curva también lo será. Ahora, si tenemos una condición que nos implique que el área de estas superficies decrezca, concluiremos que no podemos tener dichas curvas, ya que considerando una superficie de “área mínima” esta no podrá evolucionar por el flujo. Esta condición, por ejemplo, se cumple si la suma de los dos valores propios más grandes de

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f^*}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

es menor a cero (o análogamente que la suma de los dos menores sea positiva). Esos resultados aparecen en [Sm86]. Aca buscamos estudiar que pasa con funcionales un poco más generales sobre este espacio de superficies. El resultado de [LM00] incluye al recién mencionado.

## Notación

Tenemos una ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  y una función diferenciable  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  para la cual 0 es valor regular. Diremos que en esas condiciones  $\Sigma = g^{-1}(0)$  es una variedad invariante sii

$$g(x) = 0 \Rightarrow g(\varphi_t(x)) = 0 \forall t$$

Donde  $\varphi_t(x)$  denota la solución en tiempo  $t$  de  $\dot{x} = f(x)$ .

*Ejemplo 7.* Como ejemplo, si  $g(\varphi_t(x)) = g(x) \forall x$  decimos que el sistema tiene  $m$ -preintegrales.

Observamos también que si consideráramos la ecuación

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_t(x))y$$

entonces su matriz fundamental es  $\frac{\partial \varphi_t}{\partial x}$ . Por lo tanto estamos interesados en estudiar un poco acerca del comportamiento de las ecuaciones lineales ya que la ecuación recién mencionada nos será de utilidad.

Sea  $(U, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial de dimensión finita  $n$ . Si  $1 \leq k \leq n$  definimos  $\bigwedge^k U$  su  $k$ -ésimo producto exterior como el espacio vectorial de dimensión  $\binom{n}{k}$  cuya base es (dada una base ortonormal  $\{e_i\}$  de  $U$ ):

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$$

El producto interno en  $\bigwedge^k U$  se define en los elementos  $\alpha, \beta$  de la forma  $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$  y  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  de forma que  $\langle \alpha, \beta \rangle = \det(\langle u_i, v_j \rangle)$ . y se extiende linealmente.

Dada  $A : U \rightarrow U$  lineal (esto se puede definir aunque vaya a otro espacio vectorial de forma análoga) definimos los mapas  $A^{(k)}, A^{[k]} : \bigwedge^k U \rightarrow \bigwedge^k U$  de la siguiente forma:

$$A^{(k)}(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = (Au_1) \wedge \dots \wedge (Au_k)$$

$$A^{[k]}(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = \sum_{i=1}^k u_1 \wedge \dots \wedge (Au_i) \wedge \dots \wedge u_k$$

Se puede ver que vale:

$$A^{[k]} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( (I + tA)^{(k)} - I^{(k)} \right)$$

Valen las siguientes propiedades:  $(AB)^{(k)} = A^{(k)}B^{(k)}$  y  $(A + B)^{[k]} = A^{[k]}B^{[k]}$ . Además es sencillo observar que  $A^{(1)} = A^{[1]} = A$ ,  $A^{(n)} = \det(A)$  y  $A^{[n]} = \text{tr}(A)$ .

Por último, vale la pena observar que si  $Y(t)$  es la matriz fundamental de la ecuación  $\dot{y} = A(t)y$  entonces  $Z(t) = Y(t)^{(k)}$  es matriz fundamental de la ecuación  $\dot{z} = A(t)^{[k]}z$ . Esto tiene que ver con la formula de Liouville, ya que para  $k = n$  se tiene que la solución de  $\dot{z} = \text{tr}Az$  es  $\det(Y(t))$ . También para esto es importante notar que  $\|z(t)\|$  mide la variación de volumen  $k$ -dimensional.

Lo que nos va a interesar en realidad es  $A^{[2]}$  en general y para una matriz de  $3 \times 3$  se calcula de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{[2]} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{33} + a_{11} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{pmatrix}$$

Vamos a notar siempre como  $V'_f$  a la derivada de Lyapunov respecto del campo  $f$ .

## Teoría No Lineal

Esta subsección es practicamente sin importancia para el caso en el que nos centramos que es encontrar condiciones para ecuaciones en  $\mathbb{R}^n$  no restrictas a variedades invariantes.

**Teorema 17.**  $\Sigma$  es invariante  $\Leftrightarrow \exists N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$  continua de forma que

$$g'_f(x) = N(x)g(x)$$

Vamos a dar solo parte de la prueba

DEMOSTRACIÓN . ( $\Leftarrow$ ) Si  $g(x) = 0$  entonces  $g'_f(x) = 0$  entonces  $\Sigma$  es invariante.

( $\Rightarrow$ ) Sea  $h = g'_f$ . Como  $\Sigma$  es invariante, sabemos que  $g(y) = 0 \Rightarrow h(y) = 0$ , por lo que  $h(x) = N(x)g(x)$  es equivalente a que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(y) = N(y) \frac{\partial g}{\partial x}(y) + \frac{\partial N}{\partial x}(y)g(y)$$

que si  $y \in \Sigma$  se traduce en

$$\frac{\partial h}{\partial x}(y) = N(y) \frac{\partial g}{\partial x}(y)$$

Dado que 0 es valor regular lo que implica que  $\frac{\partial g}{\partial x}(y)$  tiene rango completo queda determinada  $N$  de forma única en  $\Sigma$ . Si  $x \notin \Sigma$  se define  $N(x) = (n_{ij}(x))$  tal que

$$n_{ij}(x) = \frac{h_i(x)g_j(x)}{\|g(x)\|^2}$$

y se prueba que es continua (esta medio salado, pero tiene pinta que por lo menos puede estar acotado cuando  $x \rightarrow \Sigma$ ).

□

A partir de esta prueba, se define  $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  como  $v(x) = \text{tr}N(x)$ . Vale la pena observar, que si trabajamos con  $g \equiv 0$  tenemos  $m = 0$  en cuyo caso definimos  $v \equiv 0$ .

A partir de esto, se prueba lo siguiente.

Recordemos que para la ecuación

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_t(x))y$$

la matriz fundamental es  $\frac{\partial \varphi_t}{\partial x}$ . Tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 18.** *Bajo ciertas hipótesis (razonables algunas e inentendibles otras)  $\forall k$  con sentido*

$$\left\| \bigwedge^k \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} \Big|_{T_x \Sigma} \right) \right\| \leq C e^{-\int_0^t v(\varphi_s(x)) ds} \left\| \bigwedge^{m+k} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} \right\|$$

De alguna manera es como una acotación de la evolución del volumen en el tangente de  $\Sigma$  a partir de el volumen general.

Para ver como es  $v$  enunciamos la siguiente:

**Proposición 19.**  *$v$  es la suma de los valores propios de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  asociados a el subespacio complementario a  $T_x \Sigma$  (que es invariante).*

## Equilibrios y orbitas periodicas

**Definición 5.** (a) Una singularidad de  $\dot{x} = f(x)$  es hiperbólicamente estable sii todos los valores propios de su diferencial son de parte real negativa (nos interesan los valores propios asociados al subespacio invariante  $T_x \Sigma$ ).

(b) Una órbita periodica es hiperbólicamente estable si al tomar el tiempo  $T$  del flujo (donde  $T$  es el periodo) todos los valores propios menos uno (de nuevo los asociados a  $T_x \Sigma$ ) tienen módulo menor a 1. El valor propio asociado a la dirección del flujo va a ser necesariamente 1.

Vale el siguiente teorema (y uno parecido para órbitas periódicas) que no es más que generalizar el teorema de Hartman que vale para  $m = 0$ .

**Teorema 20.**  $x_0 \in \Sigma$  equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  :

(a) Si

$$\dot{z} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}^{[m+1]}(x_0) - v(x_0)I \right) z$$

es asintóticamente estable entonces también lo es  $x_0$  (es hiperbólicamente estable).

(b) Si  $\dot{u} = -N^*(x_0)u$  es estable  $\Rightarrow$  vale el recíproco.

**Definición 6.** La medida de Lozinskiĭ de una matriz  $A$  es

$$\mu(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\|I + tA\| - 1)$$

Vale el corolario siguiente

**Corolario 21.**  $\mu(\frac{\partial f}{\partial x}^{[m+1]}(x_0)) - v(x_0) < 0$  entonces es hiperbólicamente estable.

La condición  $\mu(\frac{\partial f}{\partial x}^{[m+1]}(x_0)) - v(x_0) < 0$  es equivalente a una condición en los valores propios. Con la norma 2 tenemos que  $\mu$  es la suma de los  $m + 1$  valores propios más grandes y  $v$  es la suma de los valores propios asociados al complemento de  $T_x \Sigma$ . En el caso  $m = 0$  lo que dice es que si el valor propio mayor es negativo entonces es estable.

## Criterio de Bendixon

Vamos a decir que las curvas cerradas (pensadas como mapas  $\varphi : S^1 \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ) y las superficies (parametrizadas como  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ) son rectificables si  $\varphi$  es Lipchitz.

Si  $\psi(S^1)$  se encuentra en un subconjunto simplemente conexo de  $\Sigma$  notaremos como  $\mathcal{S}(\psi, \Sigma)$  al subconjunto de superficies rectificables  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Sigma$  tal que  $\phi(\partial \mathbb{D}) = \psi(S^1)$  (Además que  $\phi|_{\partial \mathbb{D}}$  sea biyectiva).

Definimos también el operador  $\mathcal{A} : \mathcal{S}(\psi, \Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  asociado a una función  $a : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  no negativa tal que:

$$\mathcal{A}\phi = \int_{\phi(\overline{\mathbb{D}})} a = \int_{\mathbb{D}} a \circ \phi \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right\|$$

**Proposición 22.** Sea  $\psi$  una curva simple cerrada y rectificable en  $\Sigma$ . Si  $a(x_0) > 0$  para algún  $x_0 \in \psi(S^1)$  entonces  $\exists \delta > 0$  tal que  $\mathcal{A}\phi \geq \delta \forall \phi \in \mathcal{S}(\psi, \Sigma)$ .

ESBOZO DE DEMOSTRACIÓN El tema es que cerca de  $x_0$  hay un entorno donde  $a$  es estrictamente positiva y hay una cota inferior para el área de una superficie con borde en  $\psi(S^1)$  cortada con esa bola, por lo tanto  $\mathcal{A}\phi$  va a estar acotado por el mínimo de  $a$  en esa intersección por la cota inferior del área.  $\square$

*Observación 4.* La idea va más o menos por ver que el hecho de que una curva sea invariante implica que el operador se puede aplicar a la superficie llevada por el flujo (porque si  $\phi(\overline{\mathbb{D}}) \in \mathcal{S}(\psi, \Sigma)$  como el borde  $\psi(\partial \mathbb{D})$  es invariante  $\varphi_t(\phi(\overline{\mathbb{D}})) \in \mathcal{S}(\psi, \Sigma)$ ). Buscamos entonces una condición para que  $\mathcal{A}\varphi_t(\phi) \rightarrow 0$ .

## Condición de Bendixon

Sea la ecuación diferencial  $(x, z)' = F(x, z)$  en dimensión  $n + \binom{n}{m+2}$  tal que

$$F(x, z) = \left( f(x), \frac{\partial f}{\partial x}^{[m+2]}(x)z \right)$$

Diremos que  $\dot{x} = f(x)$  cumple una condición de Bendixon en  $\Omega \subset \Sigma$  variedad invariante sii:

- $\varphi_t$  existe para todo  $t$

- $\exists V$  localmente Lipchitz,  $a, b : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  no negativas y continuas y  $\tilde{\mu}$  continua tal que valen las siguientes propiedades:

$$a(x)\|z\| \leq V(x, z) \leq b(x)\|z\|$$

$$V'_F(x, z) \leq \tilde{\mu}(x)V(x, z)$$

- La función  $g$  cumple una condición acotación que permite utilizar la proposición 2.

▪

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (\tilde{\mu}(\varphi_s(x)) - v(\varphi_s(x))) ds = -\infty$$

*Observación 5.* Si  $m = 0$  las últimas 2 se transforman en que la integral de  $\tilde{\mu}$  en las trayectorias futuras sea  $-\infty$

Vale que

$$V'_F(x, z) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left( V \left( x + hf(x), z + h \frac{\partial f^{[m+2]}}{\partial x}(x)z \right) - V(x, z) \right)$$

Decimos que la condición de Bendixon es global si  $a$  es estrictamente positiva en  $\Omega$ .

**Teorema 23.** Si  $\Omega$  simplemente conexo y se satisface una condición de Bendixon entonces no hay curvas cerradas simples rectificables que corten  $\{x \in \Omega : a(x) > 0\}$  invariantes por el flujo.

ESBOZO DE DEMOSTRACIÓN (prueba para  $m = 0$ ) Recordamos que las soluciones de  $(x, z)' = F(x, z)$  son

$$(x(t), z(t)) = \left( \varphi_t(x(0)), \bigwedge^2 \frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)z(0) \right)$$

Por lo tanto, por la primera condición en la función  $V$ , sabemos que se cumple:

$$a(\varphi_t(x)) \left\| \bigwedge^2 \frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)z \right\| \leq V(x(t), z(t)) \leq b(\varphi_t(x)) \left\| \bigwedge^2 \frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)z \right\|$$

Al mismo tiempo, la segunda condición nos afirma que

$$V'_F(x, z) \leq \tilde{\mu}(x)V(x, z) \Rightarrow V(x(t), z(t)) \leq K + \int_0^t \tilde{\mu}(x(s))V(x(s), z(s)) ds$$

Entonces aplicando el lema de Gronwall tenemos que

$$V(x(t), z(t)) \leq V(x, z) e^{\int_0^t \tilde{\mu}(\varphi_s(x)) ds}$$

Juntando con lo anterior se cumple que

$$a(\varphi_t(x)) \left\| \bigwedge^2 \frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)z \right\| \leq b(x)\|z\| e^{\int_0^t \tilde{\mu}(\varphi_s(x)) ds}$$

Implicando

$$a(\varphi_t(x)) \left\| \bigwedge^2 \frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)z \right\| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty$$

Por la última condición, uniformemente en  $x$ . Ahora supongamos que tenemos una curva  $\psi(S^1)$  simple cerrada e invariante por nuestro flujo para la cual hay un punto donde  $a$  es estrictamente positiva. Sea

una superficie  $\phi \in \mathcal{S}(\psi, \Omega)$  cualquiera. Como  $\psi$  es invariante, vemos que se cumple que  $\varphi_t(\phi) \in \mathcal{S}(\psi, \Omega) \forall t$ . Llegaremos a un absurdo ya que vemos que se tiene que cumplir que  $\mathcal{A}\varphi_t \circ \phi \geq \delta > 0$  pero al mismo tiempo

$$\mathcal{A}\varphi_t \circ \phi = \int_{\mathbb{D}} a \circ \varphi_t \circ \phi \left\| \bigwedge^2 \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} \right\| \rightarrow 0$$

□

## Robustez y relación con el closing lemma

La idea es la siguiente, si las condiciones que vimos son robustas, es decir, se mantienen al perturbar el campo en la topología  $C^1$  tendremos que para un entorno de campos no habra ciclos límite, en particular (por el Closing lemma que permite perturbar un campo  $C^1$  y cerrar orbitas de puntos no errantes) concluimos que para toda órbita (que pase por el conjunto donde valen las condiciones de Bendixon, que en principio puede variar) el  $\omega$  y el  $\alpha$  límite serán vacios o un equilibrio del campo. El problema es que en realidad no son robustas del todo las condiciones, o por lo menos las funciones  $a, b, V$  no sirven para todo el entorno del campo  $f$ . Pero de todas formas recordemos que lo único que se utiliza para probar que no hay ciclos límites es que

$$a(\varphi_t(x)) \left\| \bigwedge^2 \frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x) \right\| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty$$

y esto si va a ser robusto ante perturbaciones  $C^1$ .

En el artículo se prueba el siguiente:

**Teorema 24.** *Suponiendo  $\Sigma$  simplemente conexa y que  $\dot{x} = f(x)$  satisface una condición de Bendixon global en  $\Sigma$ . Vale que si  $x_0 \in \Sigma$  y su órbita es acotada entonces  $\lim \varphi_t(x) = p$  donde  $p$  es un equilibrio cuya variedad estable tiene codimensión a lo sumo 1.*

## Atractor de Lorentz

Primero haremos una breve introducción al atractor de Lorentz (por más información leer [GH83]), para aplicar estas ideas en encontrar una región que lo contenga. La ecuación que estudiaremos es

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \sigma, \rho, \beta > 0$$

Generalmente se fijan  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  y se estudia que pasa al variar  $\rho$ . La derivada del campo es la siguiente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\sigma - 1 & -x & 0 \\ x & -\sigma - \beta & \sigma \\ -y & \rho - z & -\beta - 1 \end{pmatrix}$$

La primera observación que hacemos es que la divergencia del campo es constante igual a  $-(1 + \sigma + \beta) < 0$  en todo  $\mathbb{R}^3$  por lo que todo conjunto invariante tendrá volumen nulo o infinito. El campo

tiene una singularidad en  $(0, 0, 0)$  para todos los valores de los parámetros y si  $\rho > 1$  tiene dos más en  $(\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$ .

Los valores propios de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  en  $(0, 0, 0)$  son  $-\beta$  y

$$\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(\rho - 1) \Rightarrow \lambda = \frac{-(1 + \sigma) \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 - 4\sigma(\rho - 1)}}{2}$$

por lo que será un punto fijo atractor para  $\rho < 1$  y tendrá un valor propio con parte real positiva si  $\rho > 1$ .

En las otras dos singularidades, los valores propios (luego de una cuenta) se tiene que son atractores para  $1 < \rho < \sigma(\sigma + \beta + 3)/(\sigma - \beta - 1)$ . En ese valor  $\rho_h = \sigma(\sigma + \beta + 3)/(\sigma - \beta - 1)$  ocurre una bifurcación de Hopf al pasar los valores propios por el eje imaginario, manteniéndose un valor propio real negativo. Esta bifurcación no genera orbitas periódicas estables cerca de los puntos fijos sino que aparecen orbitas que rodean un punto y luego van hacia el otro y lo vuelven a rodear.

Si ahora planteamos la ecuación diferencial en  $\mathbb{R}^6$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}^{[2]}(x)z \end{cases}$$

donde  $f$  es el campo de la ecuación de Lorentz y consideramos también la función  $V(x, z) = |z| = \sup\{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, |z_3|\}$ . Si hubiésemos considerado  $|z| = (z^*z)^{1/2}$  tendríamos

$$\dot{V}(x, z) = \frac{V(x, z)^{-1}}{2} z^* \left( \frac{\partial f^*}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \right)^{[2]} z$$

Con lo cual si los valores propios de  $\left( \frac{\partial f^*}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  son  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  tendríamos

$$(\lambda_2(x) + \lambda_3(x))V(x, z) \leq \dot{V}(x, z) \leq (\lambda_1(x) + \lambda_2(x))V(x, z)$$

ya que es fácil ver (viendo la fórmula de  $A^{[2]}$  y aplicandola a la forma de Jordan de la matriz) que los valores propios son la suma de los valores propios distintos. De alguna manera se puede esperar que si los dos mayores suman positivo o los dos menores negativo tendremos chance de utilizar lo visto anteriormente. Dado que  $V$  es una norma, podemos usar las funciones constantes  $1/2$  y  $2$  como  $a$  y  $b$  para tener el criterio buscado.

Con un poco más de trabajo se ve que también la que elegimos cumple lo buscado.

## 9. Más vínculos entre a.g.s. y l.a.s.

Como vimos en la sección anterior, no hay una extensión natural de los resultados de la sección 7. Sin embargo, trabajaremos sobre resultados que nos permiten vincular la a.g.s. con la estabilidad local mediante el uso de densidades. Los resultados que presentaremos, sin embargo, tienen importancia más allá de extender lo visto en la sección 7 a dimensiones mayores (arbitrarias) dado que también muestran las implicancias de la existencia de una densidad en la estabilidad.

Fue mencionada la importancia de la estabilidad local para los objetivos del control (eso se ve claramente en el ejemplo 3 que si bien es a.g.s. hay puntos arbitrariamente cercanos al origen cuyas orbitas divergen). En esta sección, presentaremos resultados de [MP06] que muestran como bajo ciertas hipótesis, la existencia de una densidad nos asegura estabilidad local. Al mismo tiempo, veremos que esas hipótesis adicionales son necesarias.

**Proposición 25.** *Sea  $\dot{x} = f(x)$  con  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$  tiene por lo menos un valor propio  $\lambda$  con  $\text{Re}(\lambda) > 0$  entonces, la cuenca de atracción  $\mathcal{R}$  tiene medida de Lebesgue nula.*

DEMOSTRACIÓN . La prueba se basa en la existencia de variedades locales invariantes (ver [HPS77], o por una introducción más amigable [Sh87]).

La idea, es que existiendo un valor propio con parte real positiva, las variedades centro estables<sup>13</sup> tendrá codimensión por lo menos 1. Esto implica que cualquier variedad centro estable local tendrá medida de Lebesgue nula.

Dado que cualquier punto que converja en el futuro al origen deberá pertenecer (a partir de un momento) a todas las variedades centro estables locales, en particular pertenecerá a una de ellas (que tiene medida de Lebesgue nula). De eso, deducimos que  $\mathcal{R} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(W_{loc}^{cs})$  por lo cual  $\mathcal{R}$  está contenido en una unión numerable de conjuntos de medida nula concluyendo que tiene medida nula.  $\square$

A partir de el anterior resultado, podemos obtener la siguiente importante conclusión que enunciaremos en forma de Teorema.

**Teorema 26.** *Sea  $\dot{x} = f(x)$  con  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$  tiene un valor propio  $\lambda$  tal que  $\text{Re}(\lambda) < 0$  entonces, la existencia de una densidad  $\rho$  implica la estabilidad asintótica local.*

Para demostrar este teorema, haremos uso de la Proposición recién probada y el siguiente Lema de [Ran01]

**Lema 27.** *Si para  $x \in U \setminus \{0\}$  donde  $U$  es un entorno del origen se cumple que*

$$\nabla \cdot (\rho f) > 0 \quad \nabla \cdot f \leq 0 \quad \rho > 0$$

Entonces  $V(x) = \rho(x)^{-1}$  satisface  $\nabla V \cdot f < 0$ .

*Demostración.* Basta recordar que

$$\nabla \cdot (\rho f) = \nabla \rho f + \rho \nabla \cdot f$$

para ver que si tomamos  $V = \rho^{-1}$  tenemos que

$$\nabla V \cdot f = -\rho^{-2} \nabla \rho \cdot f$$

que es negativo pues  $\nabla \cdot f < 0$  y  $\rho > 0$  obliga que  $\nabla \rho \cdot f > 0$ .  $\square$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 26. Como hay una densidad, el sistema es a.g.s. por lo que la Proposición anterior obliga que todos los valores propios tengan parte real menor o igual a cero. Como hay un valor propio negativo, en un entorno del origen la divergencia de  $f$  será negativa y utilizando el Lema previo llegamos a la tesis.  $\square$

Este teorema tiene una gran aplicación práctica (pues teniendo un valor propio con parte real negativa, la existencia de una densidad ya asegura una fuerte estabilidad) pero además, tiene una importante

---

<sup>13</sup>Recordar que no necesariamente son únicas.

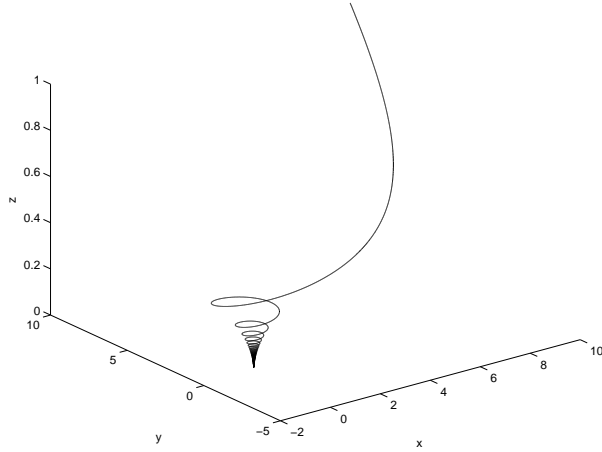


Figura 7: Una trayectoria del sistema 9

aplicación teórica, pues permite mostrar que no vale el recíproco del teorema de Rantzer. Mostraremos eso mediante un ejemplo de un sistema a.g.s., que tiene un valor propio con parte real negativa pero no es l.a.s..

*Ejemplo 8.*

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= 2xy \\ \dot{z} &= -z \end{cases}$$

Es fácil observar que hay un valor propio  $-1$  (asociado a la derivada respecto de la variable  $z$ ) y al mismo tiempo, no es difícil ver que es a.g.s. pues las dinámicas del plano  $xy$  y de  $z$  están desacopladas. Al mismo tiempo, esa observación permite ver que el sistema no es l.a.s. (en el plano  $xy$  la dinámica es la del ejemplo 3)

Para terminar la sección, presentaremos un ejemplo que muestra que la hipótesis de que haya un valor propio negativo es necesaria. Esto se debe a que en este ejemplo se puede encontrar una densidad, pero sin embargo, se puede mostrar que no es l.a.s.. Por supuesto que todos los valores propios de la derivada del campo en el origen son de parte real nula.

*Ejemplo 9.* El ejemplo es el ya presentado en la sección 3. Por comodidad para el lector volvemos a realizar la descripción del ejemplo y se agrega algún comentario que viene al caso de esta sección.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 - 2x_1x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= -x_3^3 \end{cases}$$

Este sistema es un oscilador armónico en el plano  $x_3 = 0$  y las trayectorias son espirales decrecientes para otras condiciones iniciales (ver la figura 7).

Observamos que  $\nabla \cdot f = -7x_3^2$  y que utilizando  $\rho = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-4}$  tenemos  $\nabla \cdot (\rho f) = x_3^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-4}$  que efectivamente es positiva en casi todo  $\mathbb{R}^3$ . Vale observar que  $\nabla \cdot (\rho f)$  es 0 en el plano  $x_3 = 0$ . Esto no es sorprendente ya que  $f|_{x_3=0}$  no es a.g.s. (de hecho, la dinámica allí, como mencionamos previamente es la del oscilador armónico, entre otras cosas probando que el origen no es l.a.s.). De todas maneras, si bien el origen no es l.a.s., es localmente estable en el sentido de Lyapunov (ver [Kh96]), y esa podría ser

una cosa interesante para investigar si sucede en general en presencia de densidades. Pensamos que el principal obstáculo para estudiar ese posible resultado es entender bien el comportamiento del ejemplo 3, en particular si admite o no una densidad.

## 10. Resultados recíprocos

Presentaremos algunos resultados que nos serán de gran utilidad ([Mon03]).

**Teorema 28.** *Bajo las mismas hipótesis con las que venimos trabajando, si el campo es localmente asintóticamente estable, entonces existe un difeomorfismo  $C^2$  entre la región de atracción del equilibrio y  $\mathbb{R}^n$  que conjuga el sistema  $\dot{x} = f(x)$  con  $\dot{y} = -y$  siempre que el campo sea completo.*

En la prueba (ver [Mon03]), ese difeomorfismo está calculado a partir de un difeomorfismo ( $H$ ) entre una variedad de nivel ( $\mathcal{E}$ ) de la función de Lyapunov (cuya existencia asegura el teorema de Massera) y una esfera de dimension  $n - 1$ , de la siguiente forma: dado  $x \in \mathcal{R}$  (la región de atracción) existe  $t_x \in \mathbb{R}$  tal que  $f^{t_x}(x) \in \mathcal{E}$  por lo tanto podemos mandar  $f^{t_x}(x)$  por  $H$  hasta la esfera y luego ir hacia atrás o hacia adelante por las orbitas de  $\dot{y} = -y = g(y)$  un tiempo  $t_x$ . Al difeomorfismo dado por ir hacia atrás le llamaremos  $h_1$  y al otro  $h_2$ . Cumplen que

$$h_1 \circ f^t(x) = g^t \circ h_1(x) \quad , \quad h_2 \circ f^t(x) = g^{-t} \circ h_2(x)$$

Estos difeomorfismos me permiten, a partir de una densidad para el campo  $g(y) = -y$  definir una densidad  $C^1$  para  $f(x)$ , pero únicamente en la región de atracción; una de las preguntas de interés es si es posible extenderlas de forma diferenciable a su complemento. Se observa que necesariamente el complemento de la región de atracción tendrá medida nula, en particular interior vacío. La forma de definir la densidad a partir de una densidad para el campo  $g$  es la siguiente:

$$\bar{\rho}(x) = \rho(h_1(x)) \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x) \right|$$

**Teorema 29.** *La densidad definida de esa forma está bien definida*

*Demostración.* Primero que nada, es fácil ver que es no negativa ( $h_1$  preserva orientación) y es diferenciable en  $\mathcal{R} \setminus \{0\}$  ya que  $h_1$  es  $C^2$ . Para ver que  $\nabla \cdot (\rho f) > 0$  c.t.p. consideremos un conjunto medible  $\mathcal{Z}$  que no contenga al origen en su clausura y se cumple

$$\int_{\mathcal{Z}} \bar{\rho}(x) dx = \int_{\mathcal{Z}} \rho(h_1(x)) \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x) \right| dx = \int_{h_1(\mathcal{Z})} \rho(y) dy$$

Como  $h_1 \circ f^t(x) = g^t \circ h_1(x)$  se cumple que  $\forall x \in \mathcal{R}$

$$\left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(f^t(x)) \right| \left| \frac{\partial f^t}{\partial x}(x) \right| = \left| \frac{\partial g^t}{\partial x}(h_1(x)) \right| \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x) \right|$$

Entonces

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\bar{\rho} f) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \bar{\rho}(f^t(x)) \cdot \left| \frac{\partial f^t}{\partial x}(x) \right| \right\} \Bigg|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho(h_1(f^t(x))) \cdot \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(f^t(x)) \right| \cdot \left| \frac{\partial f^t}{\partial x}(x) \right| \right\} \Bigg|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho(g^t(h_1(x))) \cdot \left| \frac{\partial g^t}{\partial x}(h_1(x)) \right| \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x) \right| \right\} \Bigg|_{t=0} = \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x) \right| \nabla \cdot (\rho g)(h_1(x)) > 0 \quad \text{c.t.p.}$$

□

*Observación 6.* Este pasaje se puede hacer de la misma forma, para el otro lado, es decir de una densidad para  $\dot{x} = f(x)$  a una para  $\dot{y} = -y$  de forma análoga

## 10.1. Condición necesaria de casi estabilidad global

Está probado, utilizando los resultados de la sección anterior, que la estabilidad asintótica global implica la existencia de una densidad  $C^1$  ([M03]). Trataremos de generalizar esto para el caso de estabilidad casi global, pero manteniendo la hipótesis de estabilidad local que nos permitiera utilizar los resultados de la sección anterior.

**Teorema 30.** *Dado una ecuación diferencial dada por un campo  $C^1$  completo, casi globalmente estable, y localmente asintóticamente estable, existe una densidad  $\rho$  de clase  $C^1$  cumpliendo todo lo ya mencionado. Además, la podemos definir de forma de que se anule en el complemento de la región de atracción.*

Notese que en el ejemplo 5 se vió que la densidad no tiene por que anularse en el complemento de la región de atracción.

Para probar el teorema haremos uso del siguiente Lema de [Ran01].

**Lema 31.** *Sea  $V(x) > 0 \forall x \neq 0$  y que cumple que*

$$\alpha \nabla V \cdot f < V \nabla \cdot f \quad m - \text{ctp}$$

*para algún  $\alpha > 0$ . Entonces  $\rho(x) = V(x)^{-\alpha}$  cumple que  $\nabla \cdot (\rho f) > 0 \quad m - \text{ctp}$ .*

*Demostración.* Al igual que en el Lema 27 haremos uso de la siguiente fórmula:

$$\nabla \cdot (\rho f) = \nabla \rho f + \rho \nabla \cdot f$$

Pues si tomamos  $\rho = V^{-\alpha}$  tendremos que  $\nabla \rho = -\alpha V^{-\alpha-1} \nabla V$  y por lo tanto tenemos

$$\nabla \cdot (\rho f) = -\alpha V^{-\alpha-1} \nabla V \cdot f + V^{-\alpha} \nabla \cdot f = V^{-\alpha-1} (-\alpha \nabla V \cdot f + V \nabla \cdot f) > 0 \quad m - \text{ctp}$$

□

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 30. Tenemos definida la candidata a densidad de la siguiente forma:

$$\bar{\rho}(x) = \rho(h_1(x)) \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x) \right|$$

Falta ver que así definida, la podemos extender diferenciablemente a  $\mathcal{R}^c$

Queda claro que dada  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$  tal que  $x_n \rightarrow z \in \mathcal{R}^c$  se cumple que  $t_{x_n} \rightarrow +\infty$  por lo tanto  $h_1(x_n) \rightarrow \infty$  o sea que si de alguna manera logramos que  $\rho(y) \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(h_1^{-1}(y)) \right| \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow \infty$  lograremos al menos que  $\bar{\rho}$  sea continua en  $\mathcal{R}^c$  extendiendola de forma ovia. Pero además, se puede ver que

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}(x) = \frac{\partial \rho}{\partial y}(h_1(x)) \frac{\partial h_1}{\partial x}(x) \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x) \right| + \rho(h_1(x)) \nabla \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x) \right|$$

Donde esa ecuación es válida  $\forall x \in \mathcal{R}^c$ . Por lo que si también logramos acotar adecuadamente a  $\rho$  y  $\frac{\partial \rho}{\partial y}$  lograremos que  $\bar{\rho}$  sea de clase  $C^1$  como queremos.

Para eso, definimos

$$j(r) = r^2 \sup_{\|y\| \leq r} \left\{ \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(h_1^{-1}(y)) \right|, \left\| \nabla \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(h_1^{-1}(y)) \right| \right\|, \frac{1}{d(h_1^{-1}(y), \mathcal{R}^c)} \right\}$$

Vale observar que  $j$  está bien definida, porque  $D_r = \{y : |y| \leq r\}$  es compacto, y las funciones ahí definidas continuas ( la que podría ser dudosa es la de la distancia, pero por ser  $\mathcal{R}^c$  cerrado y  $h_1^{-1}(D_r) \cap \mathcal{R}^c = \emptyset$  se tiene que  $\inf\{d(h_1^{-1}(y), \mathcal{R}^c) > 0\}$ ).

Ahora definamos  $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  creciente tal que fuera de algún entorno del 0 cumpla que  $\beta(y) > j(\|y\|)$  (y que sea constante en las circunferencias centradas en el origen) y que  $\beta(0) = 0$ , entonces  $\beta$  es una función de Lyapunov de  $\dot{y} = -y$ . Además podemos considerar a  $\beta$  convexa en cada dirección, es decir, teniendo en cuenta que  $\beta$  está definida radialmente, que  $\beta(tx + (1-t)y) \leq t\beta(x) + (1-t)\beta(y)$ . Probaremos que si consideramos  $\alpha > n$ ,  $\beta^{-\alpha}$  será una densidad para  $\dot{y} = -y$ . Basta ver, por la propiedad 31, que

$$-\alpha \nabla \beta(y) y < \nabla \cdot (-y) \beta(y) \Rightarrow \alpha \nabla \beta(y) y > n \beta(y)$$

Pero dado que la función es radial (su gradiente es colineal a la función  $g(y) = -y$ , podemos verificar que esto se cumple en cada dirección, y para eso bastaría con ver que

$$n \beta(x_1, 0, \dots, 0) < \alpha x_1 \frac{\partial \beta}{\partial x_1}(x_1, 0, \dots, 0)$$

Pero es fácil verificar que se cumple que si se tiene una función real  $h$  convexa y que  $h(0) = 0$  se tiene que  $h(x) \leq xh'(x)$  por lo tanto tomando  $\alpha > n$  se cumple lo que buscábamos.

De esta manera, dada  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$  tal que  $x_n \rightarrow z \in \mathcal{R}^c$  se tiene que

$$\bar{\rho}(x_n) = \rho(h_1(x_n)) \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x_n) \right| = \beta^{-\alpha}(h_1(x_n)) \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x_n) \right| \rightarrow 0$$

Se observa, que  $\bar{\rho}(x) = 0 \forall x \in \mathcal{R}^c$ ; queda por ver que esta función es derivable, pero consideremos un punto  $z \in \mathcal{R}^c$  y una sucesión cualquiera  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$  (basta suponer que está aquí porque en el complemento  $\bar{\rho}$  se anula) tal que  $x_n \rightarrow z$  entonces tenemos que

$$\frac{\|\bar{\rho}(x_n) - \bar{\rho}(z)\|}{\|x_n - z\|} = \frac{\|\bar{\rho}(x_n)\|}{\|x_n - z\|} = \frac{\beta^{-\alpha}(h_1(x_n)) \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x_n) \right|}{\|x_n - z\|} \rightarrow 0$$

Ya que si tomamos  $\alpha > 2$

$$\begin{aligned} & \beta^{-1}(h_1(x_n)) \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x_n) \right| \rightarrow 0 \\ & \frac{\beta^{-1}(h_1(x_n))}{\|x_n - z\|} < \frac{1}{\|h_1(x_n)\|^2} \underbrace{\frac{d(h_1^{-1}(h_1(x_n)), \mathcal{R}^c)}{\|x_n - z\|}}_{< 1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Todo esto por las fuertes restricciones realizadas a la función  $j$ . La primera porque  $\beta$  es mayor al determinante jacobiano y posee un factor de  $r^2$  donde  $r$  es el módulo de  $h_1(x_n)$  (que tiende a infinito), y la segunda por un argumento similar (la función  $\beta$  es mayor que el inverso de la distancia de  $x_n$  a  $\mathcal{R}^c$

y posee un factor  $r^2$ ) y dado que la distancia de un punto a un conjunto es menor o igual que la de el punto a un punto específico del conjunto.

Por lo tanto, se cumple que  $\bar{\rho}$  es derivable en  $\mathcal{R}^c$  y su derivada es nula, para ver que también es continua, recordando la fórmula de la derivada y tomando una sucesión cualquiera tenemos que (eligiendo  $\alpha$  suficientemente grande, creo que da con  $\alpha > 2$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}(x_n) &= \frac{\partial \rho}{\partial y}(h_1(x_n)) \frac{\partial h_1}{\partial x}(x_n) \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x) \right| \\ &+ \rho(h_1(x_n)) \nabla \left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x_n) \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Para que fuese continua la derivada necesitaríamos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial y}(y) = (-\alpha \beta^{-\alpha-1}(y)) \nabla \beta(y)$$

tienda a cero tan rápido como  $\rho$  cuando  $y \rightarrow \infty$ . Lamentablemente eso no pasa en general ya que se pueden construir funciones convexas de forma de que su derivada sea mayor que cualquiera de sus potencias en puntos arbitrariamente grandes.

□

## Referencias

- [An03] Angeli, D. “Some remarks on density functions for dual Lyapunov methods”, *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Hawaii, pp. 5080–5082.(2003)
- [GH83] Guckenheimer, J. , Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences 42, Springer-Verlag (1983).
- [HPS77] Hirsch, M.; Pugh, C. ; Shub, M. *Invariant Manifolds* , Lecture notes in mathematics **583** Berlin, Springer (1977).
- [Kh96] Khalil,H. *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall (1996).
- [Le63] Lefschetz, S. *Differential Equations, Geometric Theory*, Interciencia, New York (1963).
- [LM94] Y.Li and J.S. Muldowney, ”On Bendixon’s criterion” *Journal of Differential Equations* **106**, 27-39 (1994).
- [LM00] M.Y.Li & J.S. Muldowney ”Dynamics of Differential Equations on Invariant Manifolds” *Journal of Differential Equations* **168**, 295-320 (2000).
- [MM98] McCluskey & Muldownwy ”Stability implications of Bendixon’s criterion” *SIAM Reviews* **40** 1998.
- [Mass49] Massera, J.L. “On Liapunoff’s conditions of stability”, *Annals of Mathematics* **50**: 705–721 (1949).
- [Mon03] Monzón, P. “On necessary conditions for almost global stability”, *Trans. on Automatic Control* **48**(4): 631–634 (2003).

- [Mon04] Monzón, P. “Monotone measures and almost global stability of dynamical systems”, *Sixteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS2004)*, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, TP3-3 (2004).
- [Mon05] Monzón, P “Almost global attraction in planar systems”., *Systems and Control Letters* 54 (8): 753–758 (2005).
- [MP06] P.Monzón, R.Potrie, “Local and global aspects of almost global stability” ,*45th IEEE C.D.C San Diego, California* (2006) p. 5120-5125.
- [Ran01] Rantzer, A. “A dual to Lyapunov’s stability theorem”, *Systems and Control Letters* **42**(3): 161–168 (2001).
- [Sh87] Shub, M. *Global stability of dynamical systems.* , Springer Verlag (1987).
- [Sm86] R.A.Smith ”Some applications of Hausdorff dimension inequalities for ordinary differential equations”*Proc.Roy.Soc. Edinburgh* **104**(1986).