

# Coloquio de estudiantes del CMAT

## Sistemas Dinámicos Expansivos

Rafael Potrie

18 de marzo de 2007

### Resumen

La idea es definir sistemas dinámicos expansivos, mostrar ejemplos y propiedades básicas interesantes además de comentar acerca de resultados conocidos.

## 1. Introducción

Los homeomorfismos expansivos son aquellos para los cuales las propiedades dinámicas de los puntos son distintivas en el sentido que dados dos puntos distintos se diferencian un cierto valor uniforme luego de aplicar reiteradamente la transformación o su inversa. Más precisamente:

**Definición 1.** Sea  $M$  un espacio métrico compacto y  $f : M \rightarrow M$  un homeomorfismo. Decimos que  $f$  es *expansivo* si existe un valor  $\alpha > 0$  que cumple que si dos puntos  $x$  e  $y$  en  $M$  verifican que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

entonces se cumple que  $x = y$ .

Lo interesante que verifican estas transformaciones es esa propiedad dinámica distintiva que poseen sus puntos, es sencillo ver como si la precisión del instrumento de medida que utilizamos nos permite distinguir puntos a más de  $\alpha$ , podemos estar seguros que o en el pasado, o en el futuro, distinguiremos a estos. A pesar de esta “ventaja” con la que puede contar un hipotético experimentador, la definición nos permite prever un comportamiento sumamente caótico de este tipo de sistemas, además de “...una rica interacción entre la dinámica y la topología.” ([Lew3]).

Naturalmente, la primer pregunta que puede surgir es por qué pedir que se separen en el futuro y/ó en el pasado en vez de pedir una de las dos opciones. Es fácil ver que las siguientes transformaciones verifican esas propiedades (es decir, expanden al futuro):

*Ejemplo 1.* Sea  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal diagonalizable para la cual todos sus valores propios son mayores que uno (o menores). Entonces, dados dos puntos  $x, y$  distintos, se cumple que la distancia entre  $x$  e  $y$  para los iterados futuros es

$$\|A^n x - A^n y\| \geq \lambda^n \|x - y\|$$

donde  $\lambda$  denota el menor de los valores propios. Por lo tanto, vemos que siendo  $x$  e  $y$  distintos, su distancia tiende a infinito para los iterados futuros de la transformación.

*Ejemplo 2.* Definamos en  $S^1$  (pensado como los puntos del plano complejo con  $|z| = 1$ )  $f : S^1 \rightarrow S^1$  de forma tal que  $f(z) = z^2$  entonces, dados dos puntos distintos, por ejemplo  $x_1 = e^{i2\pi t_1}$  y  $x_2 = e^{i2\pi t_2}$  con  $t_2 - t_1 \notin \mathbb{Z}$ , en algún momento futuro se separan. Esto se puede probar de la siguiente manera:

$$f^n(x_i) = e^{i2\pi 2^n t_i} \quad i = 1, 2$$

Vamos a ver que en algún iterado se separan a más de una cierta constante.

En definitiva, basta ver que los conjuntos  $2^n t_1 + \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x = n + 2^n t_1 \ n \in \mathbb{Z}\}$  y  $2^n t_2 + \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x = n + 2^n t_2 \ n \in \mathbb{Z}\}$  están lejos para algún valor de  $n$ .

Esto es de hecho cierto y la distancia que alcanzan va a ser siempre mayor que  $1/4$  dado que si los dos conjuntos están a distancia menor que  $1/4$  su distancia se duplica (¿por qué?) por lo cual en algún momento superarán dicha distancia.-

Estos ejemplos acentúan la pregunta realizada anteriormente, si existen estos ejemplos, ¿a que se debe que la definición permita expansión en cualquiera de los dos sentidos?. La respuesta se encuentra en el siguiente Teorema debido a Utz ([Utz]) que demostraremos más adelante.

**Teorema 1 (Utz).** *Sea  $f : M \rightarrow M$  homomorfismo expansivo y  $M$  espacio métrico compacto. Entonces, si es expansivo al futuro (i.e. existe  $\alpha > 0$  de forma tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) < \alpha \ \forall n \geq 0$  implica  $x = y$ ) entonces  $M$  es un conjunto finito.*

Vale la pena observar que en los ejemplos presentados no se cumplen las hipótesis del Teorema, en el primer caso por no ser  $\mathbb{R}^n$  compacto y en el segundo por no ser invertible la transformación.

## 2. Ejemplos

### 2.1. El shift de Bernoulli

Sea  $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  dotado de la topología producto dada por poner la topología discreta en  $\{0, 1\}$ . Esta topología en  $\Sigma = \{\{x_n\} : a_n \in \{0, 1\} \ \forall n \in \mathbb{Z}\}$  es sabido que es equivalente a la inducida por la siguiente métrica

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}$$

y por ser producto de compactos es un conjunto compacto.

En  $\Sigma$  podemos definir la siguiente transformación  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  dada por  $\sigma(\{x_n\}) = \{y_n\}$  de forma tal que  $y_n = x_{n-1}$ . En pocas palabras, lo que hace  $\sigma$  (llamado *shift de Bernoulli*) es “correr” la sucesión  $\{x_n\}$  un lugar para la derecha. En [KH] se puede encontrar una introducción a esta transformación junto con varias propiedades, por ejemplo, que sus puntos periódicos son densos (esto igual se puede hacer como ejercicio)<sup>(1)</sup>.

Es muy sencillo observar como la transformación  $\sigma$  es expansiva con constante de expansividad 1. Para verlo, tomemos dos sucesiones diferentes  $\{x_n\}$  y  $\{y_n\}$ . Por ser distintas, existe  $n_0$  para el cual  $x_{n_0} \neq y_{n_0}$  por lo cual  $|x_{n_0} - y_{n_0}| = 1$ , entonces

---

<sup>1</sup>Además, vale la pena estudiar como se comporta esta transformación restringida a subconjuntos invariantes de  $\Sigma$ . Esto se puede encontrar tanto en [KH] capítulo 1, [Sh] capítulo 10 o en [Rob] capítulo 3. El único prerequisite para leer eso es saber algo de álgebra lineal y entender el espacio  $\Sigma$  y la transformación  $\sigma$ .

$$d(\sigma^{n_0}(\{x_n\}), \sigma^{n_0}(\{y_n\})) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n-n_0|}} \geq \frac{|x_{n_0} - y_{n_0}|}{2^{|n_0-n_0|}} = 1$$

En definitiva lo que haces es “correr” las dos sucesiones de forma tal que el término en el que difieren es el que se encuentra en donde se concentra la mayor distancia.

Sin embargo, es muy sencillo encontrar sucesiones distintas que se mantienen arbitrariamente cercanas para el futuro, por ejemplo: la sucesión constante igual a 1 se mantiene arbitrariamente a sucesiones  $\{x_n\}$  que cumplen que son uno para los  $n < n_0$  y en el resto de los valores son cero.

## 2.2. El Anosov en $\mathbb{T}^2$

Tomemos en  $\mathbb{R}^2$  la transformación lineal  $A$  dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz, tiene coeficientes enteros y determinante uno, por lo cual se deduce que la inversa también tiene coeficientes enteros. Los valores propios son uno mayor y otro menor a uno y sus vectores propios (ortogonales) hacen con el eje  $Ox$  un ángulo irracional (verificar todas estas afirmaciones). Podemos por lo tanto, inducir a partir de esta transformación, un difeomorfismo en el toro  $\mathbb{T}^2$  pensado como  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  (por más detalles recurrir a [KH] o [Rob]). En la figura 1 se aprecia como transforma esta matriz el cuadrado  $[0, 1]^2$ .

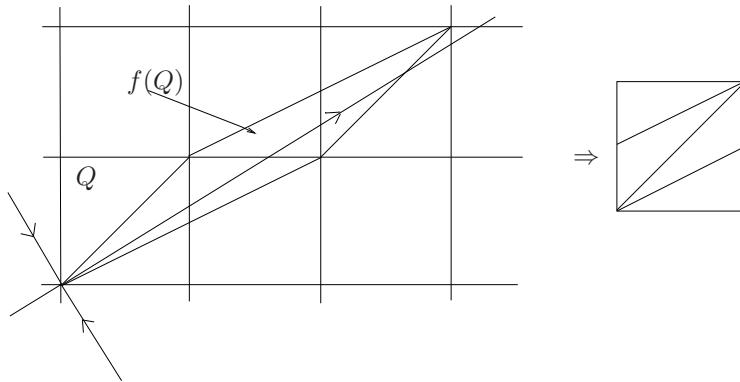


Figura 1: Difeomorfismo inducido por  $A$

No es difícil tampoco, demostrar que este difeomorfismo del toro es expansivo. Para ver eso, diagonalizemos la matriz y tomando dos puntos diferentes, vemos que alguna de sus coordenadas difieren. Por ejemplo la asociada al valor propio mayor que uno (en caso contrario se argumenta con  $f^{-1}$ ). Pero entonces, la distancia en esa dirección crecerá exponencialmente en  $\mathbb{R}^2$ . Para ver que en  $\mathbb{T}^2$  se puede encontrar una constante de expansividad se argumenta de forma similar al ejemplo 2 probando que si los puntos están suficientemente cerca su distancia crece exponencialmente por lo cual en algún momento han de encontrarse lejos.

Es fácil en este caso también encontrar puntos que se mantienen cerca para el futuro.

### 3. Caracterización de la expansividad

Vamos a comentar un poco acerca de formas de asegurar expansividad que recuerdan a los resultados de Lyapunov y Massera para ecuaciones diferenciales. Estos resultados se pueden encontrar en [Lew1] y [Lew3].

Empezemos por dar una definición:

**Definición 2.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un homeomorfismo donde  $M$  es un espacio métrico compacto. Decimos que  $V : \{(x, y) \in M \times M : d(x, y) \leq \alpha\} \rightarrow \mathbb{R}$  continua es una función de Lyapunov para  $f$  si se verifican las siguientes propiedades:

1.  $V(x, x) = 0 \forall x \in M$ .
2.  $\Delta V(x, y) = V(f(x), f(y)) - V(x, y) > 0 \forall x \neq y$  siempre que este bien definido.

A partir de las funciones de Lyapunov se puede caracterizar los sistemas expansivos a partir del siguiente teorema (del cual probaremos solo una parte, por el resto de la prueba ver [Lew3])

**Teorema 2.**  $f : M \rightarrow M$  es expansivo si y sólo si  $f$  admite una función de Lyapunov.

DEMOSTRACIÓN DEL RECÍPROCO. Sean  $x$  e  $y$  en  $M$  distintos de forma tal que  $V(x, y) \geq 0$  (en caso contrario se argumenta de igual forma para el pasado) y supongamos que se mantienen a menos de  $\alpha$  para el futuro. Entonces, sabemos que tenemos definido  $V(f^n(x), f^n(y))$  para todo  $n > 0$  y que verificará  $V(f^n(x), f^n(y)) > V(f(x), f(y)) > 0$  para todo  $n > 0$  (esto es por la segunda condición para  $V$ ).

Como  $V$  es continua y vale cero en la diagonal, sabemos que existe  $\varepsilon > 0$  de forma tal que si  $d(z, w) < \varepsilon$  entonces  $V(z, w) < V(f(x), f(y))$  por lo tanto, concluimos que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$  para todo  $n > 0$ .

Como  $K = \{(z, w) \in M \times M : \varepsilon \leq d(z, w) \leq \alpha\}$  es compacto y  $\Delta V$  es positiva en dicho conjunto, concluimos que  $\Delta V$  alcanza un mínimo  $\delta > 0$  en  $K$ .

Juntando esto con la definición de  $\Delta V$  concluimos que  $V(f^n(x), f^n(y)) \geq (n - 1)\delta$  lo cual es absurdo pues por ser  $K$  compacto  $V$  tiene que encontrarse acotada allí. □

### 4. Demostración del Teorema de Utz

Probaremos el Teorema de Utz siguiendo la demostración de [Lew3] en la cual se muestran muchas de las ideas con las que se trabaja en el contexto de homeomorfismos expansivos<sup>(2)</sup>.

Recordemos el enunciado del Teorema.

**Teorema 3 (Utz).** Sea  $f : M \rightarrow M$  homeomorfismo expansivo y  $M$  espacio métrico compacto. Entonces, si es expansivo al futuro (i.e. existe  $\alpha > 0$  de forma tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) < \alpha \forall n \geq 0$  implica  $x = y$ ) entonces  $M$  es un conjunto finito.

DEMOSTRACIÓN .

---

<sup>2</sup>Las herramientas usadas, así como los argumentos son simples, pero conviene hacerlos con cuidado un par de veces para familiarizarse. Es recomendable seguir la prueba con lápiz en mano y rellenar sus detalles.

**Paso 1:** Primero veamos que todos los puntos tienen que ser “estables” para el pasado, es decir, existe un valor  $\varepsilon < \alpha$  de forma tal que todo punto  $x \in M$  posee un entorno  $U_x$  que cumple que si  $y \in U_x$  entonces  $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon$  para todo  $n \geq 0$ .

Esto se tiene que cumplir pues en caso contrario existirían puntos  $y_n \rightarrow x$  de forma tal que para cierto valor  $k_n$  se cumple que  $d(f^{-k_n}(y_n), f^{-k_n}(x)) > \varepsilon$  (podemos suponer que este valor  $k_n$  es el primero para el cual pasa lo mencionado pues  $y_n$  se encuentra a menos de  $\varepsilon$  de  $x$ ).

Observamos que  $k_n$  tiene que tender a  $+\infty$  pues siendo  $f$  uniformemente continua, necesita cada vez más iterados para hacer que puntos arbitrariamente cercanos superen la distancia  $\varepsilon$  que se encuentra fija.

Ahora, consideramos los puntos  $z_n = f^{-k_n}(y_n)$  y  $w_n = f^{-k_n}(x)$  que cumplen que  $d(z_n, w_n) > \varepsilon$  y además, verifican que  $d(f^l(z_n), f^l(w_n)) < \varepsilon$  para todo  $1 \leq l \leq k_n$ .

Sea  $n_j \rightarrow +\infty$  de forma tal que  $z_{n_j} \rightarrow z$  y  $w_{n_j} \rightarrow w$  por lo cual tenemos que  $d(z, w) > \varepsilon$  en particular, son puntos distintos.

Veamos como  $f(z)$  y  $f(w)$  se mantienen siempre a menos de  $\alpha$  para el futuro<sup>(3)</sup> violando la expansividad al futuro.

Para eso, utilizamos que

$$d(f^m(z), f^m(w)) = \lim_{j \rightarrow +\infty} d(f^m(z_{n_j}), f^m(w_{n_j})) \leq \varepsilon$$

pues para  $n_j$  suficientemente grande (de forma tal que  $k_{n_j} > m$ ) se cumple que  $d(f^m(z_{n_j}), f^m(w_{n_j})) \leq \varepsilon$ .

**Paso 2:**

Es fácil ver que si dos puntos se mantienen cerca para el pasado tienen que también acercarse. Además, se puede ver que lo hacen uniformemente.

Lo que queremos decir es que  $\forall \varepsilon > 0$  ( $\varepsilon < \alpha$ ) y  $\forall \delta > 0$  existe un valor de  $N$  de forma tal que si  $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon \forall n \geq 0$  entonces se cumple que si  $m > N$  entonces  $d(f^{-m}(x), f^{-m}(y)) < \delta$ <sup>(4)</sup>.

Si esto no pasara, para todo  $N$  existirían puntos  $x_N$  e  $y_N$  verificando que  $\delta \leq d(f^{-k}(x_N), f^{-k}(y_N)) < \varepsilon < \alpha$  para todo  $0 \leq k \leq N$ .

Si consideramos  $N_j \rightarrow +\infty$  de forma tal que  $f^{-N_j}(x_{N_j}) \rightarrow z$  e  $f^{-N_j}(y_{N_j}) \rightarrow w$  se cumplirá que  $d(z, w) > \delta$  pero sin embargo  $d(f^n(z), f^n(w)) < \varepsilon < \alpha$ <sup>(5)</sup> para todo  $n \geq 0$  violando la expansividad al futuro.

**Paso 3:**

Con lo obtenido podemos probar entonces que  $M$  es un conjunto finito.

Como todo punto tiene un entorno  $U_x$  para el cual los puntos se mantienen cerca para el pasado, tenemos un cubrimiento de  $M$  por estos abiertos del cual podemos seleccionar un subcubrimiento finito por la compacidad de  $M$ .

Sea  $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$  ese subcubrimiento y sea  $n_k \rightarrow +\infty$  de forma tal que  $f^{-n_k}(x_i) \rightarrow x_i^\infty \forall i$ .

Como sabemos que para  $n_k$  suficientemente grande  $f^{-n_k}(U_{x_i})$  se encuentra en un entorno arbitrariamente pequeño de  $x_i^\infty$  al mismo tiempo que  $f^{-n_k}(M) = M$  concluimos que  $M = \{x_1^\infty, \dots, x_n^\infty\}$ .

□

<sup>3</sup>Lo hacemos para  $f(z)$  y  $f(w)$  pues  $z$  y  $w$  podrían estar ya a más de  $\alpha$ .

<sup>4</sup>Notar como esto muestra que si dos puntos se mantienen cerca para el pasado entonces las distancias de sus iterados pasados tienden a cero. Pero no solo eso, también muestra que lo hacen uniformemente, es decir, todos los puntos con esa propiedad van a cero a la “misma” velocidad.

<sup>5</sup>Esto es por el mismo argumento utilizado en el Paso 1.

## 5. Otros resultados, problemas abiertos y comentarios

Dado que los espacios topológicos naturales en sistemas dinámicos son las variedades, inmediatamente surge la pregunta acerca de ¿Qué variedades admiten homeomorfismos expansivos?. Vimos un ejemplo en  $\mathbb{T}^2$  que se puede también generalizar a  $\mathbb{T}^n$  sin ningún problema, por lo cual vemos que hay expansivos en variedades de cualquier dimensión. Pero por ejemplo: ¿habrá expansivos en  $S^2$ ? ¿y en  $S^n$ ?

Brien y Reddy, en 1970 ([OR]) prueban que toda superficie de género mayor que 1 admite un homeomorfismo expansivo, pero no es hasta 1989 ([Lew2]) que se prueba que  $S^2$  no admite homeomorfismos expansivos. En [Lew2] además, se completa la clasificación de estos, determinando que los expansivos en  $\mathbb{T}^2$  son conjugados a los Anosov lineales <sup>(6)</sup> mientras que en las superficies de género mayor son conjugados a los pseudo-Anosov.

Para probar el resultado mencionado, se construye para los expansivos una estructura de producto local, encontrando conjuntos estables e inestables para todos los puntos (entre otras cosas, un paso fundamental es probar que no puede haber puntos estables). Estas ideas son claves para la clasificación mencionada y para los resultados en dimensiones mayores.

En dimensiones mayores están los resultados de Vieitez (ver [Vie1] y [Vie2]) que clasifica los expansivos en dimensión 3 cuyo conjunto no errante<sup>(7)</sup> es toda la variedad (y alguna otra hipótesis técnica, pero no mayor, por ejemplo, si es un difeomorfismo expansivo, se cumple la hipótesis, [Vie2]) y prueba que dichos expansivos son todos conjugados a difeomorfismos de Anosov lineales en  $\mathbb{T}^3$  !!!!!. Sin embargo, eliminando la hipótesis de que el conjunto no errante sea toda la variedad hay ejemplos que no son conjugados al Anosov (ver [FrRo]). Tampoco se sabe si un expansivo en  $\mathbb{T}^3$  ha de ser conjugado al Anosov. Las ideas utilizadas en [Vie1] y [Vie2] mantienen la línea de [Lew2], pero necesitan de argumentos topológicos más involucrados dada la complejidad de las variedades de dimensión 3. En [Vie2] se utilizan también ideas de teoría ergódica diferenciable para probar que los difeomorfismos expansivos cuyo no errante es todo son conjugados al Anosov.

Otros resultados interesantes vinculan la expansividad con la hiperbolicidad. Mañé, en [Mañ], prueba que el interior  $C^1$  de los difeomorfismos expansivos, está formado por difeomorfismos  $\Omega$ -estables (es decir que las propiedades dinámicas en su conjunto no errante no varían bajo perturbaciones pequeñas en la topología  $C^1$ ).

A pesar de los resultados de Lewowicz que caracterizan completamente los expansivos en superficies desde el punto de vista topológico, aún quedan preguntas por responder, en particular relacionadas a los resultados de Mañé. Al día de hoy, por ejemplo, no se sabe si los difeomorfismos del toro  $\mathbb{T}^2$  que están en el borde  $C^1$  de los expansivos se pueden aproximar por difeomorfismos de Anosov, eso a pesar que el resultado de Mañé asegura que el interior  $C^1$  de los expansivos en  $\mathbb{T}^2$  son de Anosov y los del borde han de ser conjugados a Anosov (por el resultado de Lewowicz).

## 6. Flujos Expansivos

Para terminar, vamos a comentar un poco acerca de como se define esta noción para flujos. La idea es usar la definición de [BW].

---

<sup>6</sup>Ser conjugado significa que el homeomorfismo es igual a menos de un cambio de coordenadas, esto es un resultado muy fuerte ya que los Anosov son muy bien conocidos.

<sup>7</sup>El conjunto no errante es el conjunto de los puntos  $x$  de forma tal que para todo  $U$  entorno, existe  $n$  de forma tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ .

**Definición 3.** Sea  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  un flujo en  $M$  espacio métrico compacto. Decimos que  $\phi$  es expansivo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  de forma tal que si

$$d(\phi_t(x), \phi_{s(t)}(y)) < \delta \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

para un par de puntos  $x, y \in M$  y  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función continua tal que  $s(0) = 0$  entonces, se cumple que  $y = \phi_t(x)$  con  $|t| < \varepsilon$ .

Parecería como que la definición es mucho más rebuscada, pero en realidad no lo es tanto, además, en [BW] también prueban que es equivalente a pedir que  $s$  sea un homeomorfismo creciente. La idea es que si dos puntos se mantienen cerca en un flujo eso no significa que el flujo no “expanda” puesto que puntos cercanos en una misma órbita usualmente se mantendrán cercanos. La reparametrización ( $s$ ) lo que asegura es que la expansión es geométrica y no cinemática, es decir, lo que se tiene que separar son las órbitas y no los puntos en estas.

Lo que parecería ser un problema de esta definición es que no permite que el flujo tenga singularidades (ver [BW], pero se puede hacer como ejercicio).

En este contexto, y con la filosofía de entender las variedades que admiten este tipo de transformaciones, se prueba en [Pat] que para que una variedad de dimensión 3 admita un flujo expansivo, ha de tener “muchos agujeros”, es decir, de alguna manera, la expansividad se da en los momentos que las órbitas “eligen” caminos distintos dentro de la variedad.

Los ejemplos más sencillos de flujos expansivos son las suspensiones de homomorfismos expansivos y los flujos geodésicos en variedades de curvatura negativa. Todos estos (obviamente por el resultado mencionado) están libres de singularidades.

Sin embargo, no resulta natural (al menos a mi gusto) descartar los flujos con singularidades de los flujos expansivos ya que estos pueden presentar separación geométrica de sus órbitas a pesar de tener singularidades. Simplemente que la definición tiene que ser retocada para permitir las.

**Definición 4.** Un flujo es  $K^*$ -expansivo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  de forma tal que si

$$d(\phi_t(x), \phi_{s(t)}(y)) < \delta \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

para un par de puntos  $x, y \in M$  y  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  homeomorfismo creciente tal que  $s(0) = 0$  entonces, se cumple que existen  $t$  y  $u$  de forma tal que  $\phi_{s(u)}(y) = \phi_{u+t}(x)$  con  $|t| < \varepsilon$ .

El problema es que teniendo singularidades no hay una cota inferior para la “velocidad” de las órbitas por lo cual se podría partir de puntos en una misma órbita que se encuentren muy lejanos en el tiempo y con la reparametrización permitir que sus órbitas se mantengan cerca. Esto a mi gusto sería artificial dado que a pesar de ello se puede tener que las órbitas se separen geoméricamente.

Ambas coinciden en que se cumple que si  $\tilde{M}$  es  $M$  cocientado por la relación de equivalencia de pertenecer a la misma órbita, se tiene que:

$$\inf_{[x], [y] \in \tilde{M}} \sup_{t, s \in \mathbb{R}} \{d(\phi_t(x), \phi_s(y))\} \geq \delta > 0$$

Que de alguna manera mide la separación de las órbitas.

En este contexto, se tiene un resultado ([Art]) que da una condición necesaria y suficiente para existencia de flujos expansivos (con singularidades) en superficies que en particular permite probar que no los hay en  $S^2$  ni en  $\mathbb{T}^2$ . Además, en [Art] se presentan ejemplos en superficies de género mayor a 1.

## Referencias

- [Art] A. Artigue, preprint 2007.
- [BW] R. Bowen y P. Walters, Expansive One-Parameter Flows, *Journal of Differential Equations* **12** p. 180-193 (1972).
- [FrRo] J. Franks y C. Robinson, A Quasi-Anosov Diffeomorphism that is not Anosov. *Trans. Am. Math. Soc.* **233** p.267-278. (1976).
- [KH] A. Katok y B. Hasselblatt; Introduction to the modern theory of Dynamical Systems, *Cambridge Univ. Press* (1995).
- [Lew1] J. Lewowicz, Lyapunov functions and topological stability, *Journal of Differential Equations* **38** p. 192-209 (1980).
- [Lew2] J. Lewowicz, Expansive Homomorphisms of Surfaces, *Bol. Soc. Bras. de Mat.* **20** (1989), 113-133.
- [Lew3] J. Lewowicz, Dinámica de los homeomorfismos expansivos. *Monografías del IMCA* (2003)
- [Mañ] R. Mañé, Expansive Diffeomorphisms, *Lecture Notes in Math.* **468** Springer p. 162-174 (1975).
- [OR] O. Brien y W. Reddy, Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism. *Pacific Journal of Math.* **35** p. 737-741 (1970).
- [Pat] M. Paternain, Expansive flows and the fundamental group, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **24** 179-199 (1993)
- [Rob] C. Robinson, Dynamical Systems, *CRS Press* (1995).
- [Sh] M. Shub, Global Stability of Dynamical Systems, *Springer-Verlag* (1987).
- [Utz] W.R. Utz. Unstable homeomorphisms. *Proc. Am. Math. Soc.* **1** (1950).
- [Vie1] J.L. Vieitez, Expansive homeomorphisms and hyperbolic diffeomorphisms on three manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **16** p 591- 622 (1996).
- [Vie2] J.L. Vieitez, Lyapunov functions and expansive diffeomorphisms on 3D manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **22** p 601- 632 (2002).