Práctico 9: Función implícita y curvas.

1. Probar que la ecuación $xy^2 + 4x^2y - 12 = 0$ determina $y = f(x)$ alrededor del punto (1,2). Dar la ecuación de las rectas tangente y normal al gráfico de f en el punto $x = 1$.

2. Probar que las siguientes ecuaciones determinan $y = f(x)$ alrededor del punto (x_0, y_0), que se indica en cada caso. Calcular $f'(x_0)$, y $f''(x_0)$.

   (a) $x^2y + \log(xy) = 1$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

   (b) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, en (x_0, y_0) genérico con $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$, $y_0 \neq 0$. Verificar lo anterior despejando y explícitamente.

3. Demostrar que existe $f : U \to V$ tal que $x + \mathrm{sh}(x) - \mathrm{sen}(f(x)) = 0$, donde $U, V \subset \mathbb{R}$ son entornos de 0. Mostrar que $f \in C^\infty$ y hallar $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$

4. Demostrar que la ecuación $e^y + y = e^{-2x} - x$ determina una única función $y = f(x)$ definida para todo x real. (Se sugiere estudiar la función $F(y) = e^y + y$.)
   Hallar $f'(0)$, $f''(0)$.

5. Se considera la ecuación

$$3x^3 + 6x^2y + 3xy^2 + 2y^3 - 16 = 0.$$

   (a) Probar que existe la función implícita $y = f(x)$ definida por la ecuación anterior y que f puede definirse en toda la recta real.

   Sugerencia: Para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario fijo, considerar la función $\phi^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi^x(y) = 3x^3 + 6x^2y + 3xy^2 + 2y^3 - 16, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

   Probar que ϕ^x es monótona creciente estricta y que $\lim_{x\to\pm\infty} \phi^x = \pm\infty$. Deducir que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, existe un único $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi^{x_0}(y_0) = 0$.
   (b) Demostrar que f es C^∞, hallar los máximos y mínimos relativos de f y estudiar su comportamiento cuando $x \to \pm\infty$. Como conclusión, representar gráficamente la función f.

6. Sea $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = x^3 + y^2 + yz$.

   (a) Hallar los puntos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tales que es posible aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación $F(x, y, z) = 0$ para despejar $z = f(x, y)$ en un entorno de (a, b).

   (b) Calcular el gradiente de f en el punto $(1, 1)$.

7. Graficar las siguientes curvas.

   a) $\alpha(t) = (t^2, t^3)$

   b) $\alpha(t) = a(e^t.cost, e^t.sent)$

   c) $\alpha(t) = a(t - sent, 1 - cost)$

   d) La curva en el plano que en coordenadas polares viene dada por
   $r = 1 - \cos\theta$.

8. Graficar las siguientes curvas y hallar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal en los puntos indicados.

   - $\alpha(t) = (4t - 1, 3t, 2 - t)$ en $t = 1$.
   - $\alpha(t) = (acost, asent, bt)$ en $t = \pi/2$.
   - Intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2y$ en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$.

9. Probar que si $\alpha : [a, b] \to R^n$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y cumple $\alpha(a) = \alpha(b)$, entonces existe $t \in [a, b]$ tal que $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son perpendiculares.

10. Probar con un ejemplo que para una curva como en el ejercicio anterior no es verdad en general que $\alpha(b) - \alpha(a) = \alpha'(c)(b - a)$ para algún punto c entre a y b.
    Probar que si $||\alpha'(t)|| \leq M$ para $t \in [a, b]$ entonces:

    $$||\alpha(b) - \alpha(a)|| \leq M(b - a).$$

    Sug.: Probar antes que $\alpha(b) - \alpha(a) = \int_a^b \alpha'(t)dt$.

11. Hallar la longitud del cicloide $(t - sent, 1 - cost)$ para $t \in [0, \pi]$.
    Idem para la hélice $(acost, asent, bt)$ para $t \in [0, \pi/2]$.
    Hallar la parametrización por longitud de arco de la hélice.

12. Hallar las ecuaciones del vector tangente unitario, del vector normal principal y del plano osculador de la hélice en el punto $\pi/2$ y de la curva (t, t^2, t^3) en el punto $(1, 1, 1)$.