Práctico 8: Integrales múltiples II.

1. Calcular $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ en cada uno de los siguientes casos, haciendo cambios de variable convenientes:

(a) $f(x,y) = x + y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq\ x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

(c) $f(x,y) = x^2/(x^2 + y^2)$ y D es el triángulo de lados $y = x$, $y = -x$, $x = 1$ (se sugiere pasar a coordenadas polares).

(d) $f(x,y) = (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)$ y D es el cuadrado de vértices $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$.

(e) $f(x,y) = x^2/(x^2 + y^2)$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$. Se sugiere hacer el cambio de variable $x = \sqrt{v - u}$, $y = v + u$.

2. Dado $r > 0$, sean $I(r) = \int_{-r}^{r} e^{-u^2} du$ y $R = [-r, r] \times [-r, r] \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Demostrar $I(r)^2 = \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

(b) Sean C_1 y C_2 los discos circulares inscrito y circunscrito a R, respectivamente. Demostrar que

$$\iint_{C_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leq I(r)^2 \leq \iint_{C_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy. \tag{1}$$

(c) Haciendo un cambio a coordenadas polares calcular

$$\iint_{C_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \quad \text{y} \quad \iint_{C_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

(d) Tomando límite con $r \to +\infty$ en (1) deducir $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

3. Calcular la integral $\iint_D x\,dx\,dy$ siendo D el paralelogramo de vértices $(-2/3, -1/3)$, $(2/3, 1/3)$, $(4/3, -1/3)$ y $(0, -1)$ de las siguientes formas:

(a) En coordenadas cartesianas.

(b) Haciendo un cambio de variables lineal que transforme D en el cuadrado de vértices: $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$.

4. Sea $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u > 0\}$ y $h \colon U \to h(U)$ dada por $h(u,v) = (u + v, v - u^2)$.

(a) Probar que h es un cambio de coordenadas (se hallará explícitamente h^{-1}).

(b) Sea T el triángulo de lados $u = 0$, $v = 0$, $u + v = 2$. Calcular el área de $S = h(T)$.

5. Demostrar la siguiente igualdad:

$$\iint_D f(xy)\,dx\,dy = \log(2)\int_1^2 f(u)\;du,$$

siendo D la región del primer cuadrante limitada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

6. Calcular el volumen de D:

(a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2/a^2 + y^2/b^2 \le z \le 1\}$.

(b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\ \}$.

(c) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ x^2 + y^2 - rx \ge 0,\ x^2 + y^2 + rx \ge 0\ \}$.

(d) D comprendido entre $z = x^2$, $z = 4 - x^2 - y^2$.

7. (Una aplicación a física y geometría) Sea S un sólido en el espacio que tiene una densidad (masa por unidad de volumen) conocida que llamamos $f(x, y, z)$ para cada $(x, y, z) \in S$. Esto determina una función densidad $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Definimos la *masa* de S mediante $m(S) = \iiint_S f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$. Sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}$ definidos por

$$\bar{x} = \frac{1}{m(S)}\iiint_S x f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{m(S)}\iiint_S y f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$\bar{z} = \frac{1}{m(S)}\iiint_S z f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

El punto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ se llama el *centro de gravedad* de S. Si consideramos el caso en que f es la función constante 1, entonces $m(S) = \mathrm{vol}(S)$ y a $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ se le llama el *centroide* de S.

(a) Probar que si la densidad de S es constante, entonces el centro de gravedad de S coincide con su centroide.

(b) Hallar la masa del sólido comprendido entre dos esferas de radios a y b, suponiendo que la densidad en cada punto es igual al cuadrado de su distancia al centro.

(c) Sea S un cono sólido circular recto de altura h y radio de la base R. Demostrar que la distancia del centroide a la base es $\frac{1}{4}h$. Sugerencia: dibujar $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$.

(d) Determinar el centro de gravedad del cono de la parte anterior, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia de ese punto a la base.

8. Calcular la integral

$$\iiint_D \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz,$$

donde $D = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$.

9. Calcular $\iiint_D f\,dx\,dy\,dz$ en los siguientes casos:

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, D la región limitada por $z = 0, z = 1$ y $z^2 = x^2 + y^2$.

(b) $f(x, y, z) = z$, $D = \{(x, y, z) : 0 \le a \le x^2 + y^2 + z^2 \le b\}$.

(c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$, $D = \{(x,y,z) : (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leq r\}$.

(d) $f(x,y,z) = x^2+y^2$, D la región limitada por $x^2+y^2 = 2x$, $z = 0$ y $z = 2$.

10. Hallar el volumen de la intersección de la bola $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ con el interior del cilindro $2x^2+y^2-2x = 0$.

11. Se consideran las superficies S_1 y S_2 en $\mathbb{R}^3$ dadas respectivamente por las ecuaciones

$$\begin{cases} 2az = x^2+y^2 & (S_1), \\ x^2+y^2-z^2 = a^2 & (S_2), \end{cases}$$

donde $a > 0$. Hallar el volumen del sólido acotado que limitan S_1 y S_2.

12. (a) Calcular

$$\iiint_A (x^2+y+z^2)^3 \, dx \, dy \, dz,$$

donde

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

(b) Calcular

$$\iiint_B (x^2+y^2) \, dx \, dy \, dz,$$

donde

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq r^2,\ x \geq 0\}.$$

13. Designamos mediante (ρ, ϕ) a las coordenadas polares en el plano.

(a) Hacer un esquema de los puntos del plano que verifican

$$\begin{cases} 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq \frac{2R\phi}{\pi} \end{cases}$$

Sea S_R este conjunto.

(b) Calcular el volumen intersección de la bola $B_R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ y el cilindro de generatrices paralelas al eje oz que se proyecta como S_R sobre el plano xy.