Práctico 7: Integrales múltiples I.

1. Sea $I = [0,1]^2$ y $f : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad \forall (x,y) \in I.$$

1. Probar que para toda partición P de I es $s(f,P) = 0$ y $S(f,P) = 1$.
2. Deducir que f no es integrable.

2. Sea $I = [0,1]^2$ y $p \in I$ un punto cualquiera. Definimos $\chi_p : I \to \mathbb{R}$ mediante

$$\chi_p(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = p \\ 0, & \text{si } x \neq p \end{cases}, \quad \forall x \in I.$$

1. Probar que para cada $n = 1, 2, \ldots$ se cumple:
   (a) Existe un bloque B_n, con $p \in B_n$ y $B_n \subset I$, tal que $\mu(B_n) = \dfrac{1}{n^2}$.
   (b) Existe una partición P_n de I tal que $S(\chi_p, P_n) < \dfrac{1}{n^2}$.
2. Deducir que χ_p es integrable y que $\int_I \chi_p = 0$.

3. Sea $I = [0,1]^2$ y $D = \{p_1, \ldots, p_r\}$ un conjunto finito de puntos de I. Definimos $\chi_D : I \to \mathbb{R}$ mediante

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = p_i, \text{ para algún } i = 1, \ldots, r \\ 0, & \text{si } x \neq p_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, r \end{cases}, \quad \forall x \in I.$$

Probar que χ_D es integrable y que $\int_I \chi_D = 0$. Sugerencia: escribir χ_D en función de $\chi_{p_1}, \ldots, \chi_{p_r}$.

4. Las integrales iteradas que siguen corresponden a integrales dobles de f sobre ciertos dominios. Dibujar esos dominios y expresarlas como integrales iteradas en el orden inverso de integración.

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx \qquad \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,dy \qquad \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx$$

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy \qquad \int_1^e dx \int_0^{\log(x)} f(x,y)\,dy$$

5. Calcular $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = 2x - y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

(c) $f(x,y) = xy^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y+1\}$.

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \operatorname{sen}(x)\}$.

(e) $f(x,y) = xy$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ y \geq 0\}$.

(f) $f(x,y) = (xy)^2$ y D es la región acotada del primer cuadrante comprendida entre las hipérbolas: $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

6. Calcular $\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ en los siguientes casos:

(a) $f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^2}$, $D = \{(x,y,z) : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x+y+z \leq 1\}$.

(b) $f(x,y,z) = x$, D la región limitada por $z = 0$, $y = 0$, $y = x$, $x+y+2$ y $x+y+z = 6$.

(c) $f(x,y,z) = xyz$, $D = \{(x,y,z) : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.