

Práctico 6: Multiplicadores de Lagrange.

1. Se considera $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (x+y)e^{x+y}$. Hallar los extremos absolutos de f condicionados a $x^2 + y^2 = 1$.
2. Se considera $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (x-y)e^{x+y}$. Hallar los extremos absolutos de f condicionados a $x^2 + y^2 = 1$.
3. Determinar los extremos absolutos de la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = ax + by + cz$ ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$), condicionados a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
4. Hallar extremos absolutos de f en D justificando su existencia.
 - (a) $f(x, y) = xy$ con $D = \{(x, y) : 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4\}$.
 - (b) $f(x, y) = e^{(x-1)^2+y^2}$ con $D = \{(x, y) : 2x^2 + y^2 \leq 1\}$.
5. Hallar la máxima y mínima distancia desde el origen a la curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.
6. Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ que están más próximos al origen.
7. Consideremos la función $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x \cdot y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Hallar los extremos de f condicionados a $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$ y deducir la desigualdad de Cauchy-Schwarz ($|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$).
8. Hallar los extremos absolutos de f en D justificando su existencia.
 - (a) $f(x, y, z) = x - y + 5z$, $D = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1, 2x - z = 0\}$
 - (b) $f(x, y, z) = xyz$, $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, xy + yz + zx = 1\}$
9. Hallar la máxima y mínima distancia (justificando su existencia) del punto $(1, 0, 0)$ a la intersección de las superficies:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

10. (*Regresión lineal*) Dados $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, parejas de números reales con x_1, \dots, x_n no todos iguales, hallar una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = ax + b$ que minimice el "error cuadrático" $E(a, b)$, dado por

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{i=n} (f(x_i) - y_i)^2.$$

¿Por qué es importante que x_1, \dots, x_n no sean todos iguales?