

Práctico 5: Extremos.

1. Hallar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

(b) $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$.

(c) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$.

(d) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$.

(e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(f) $f(x, y) = x^4 + y^2 - 2y + 2$.

(g) $f(x, y) = \text{sen}(x) \text{sen}(y) \text{sen}(x + y)$ (clasificar sólo los que pertenecen al cuadrado $[0, \pi] \times [0, \pi]$).

2. Sea $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$. Hallar todos sus puntos críticos y clasificarlos. ¿Tiene f extremos absolutos en todo \mathbb{R}^2 ?

3. Determinar los extremos absolutos y relativos y los puntos de silla de la función

$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2) \text{ en } [0, 1] \times [0, 1].$$

Determinar si f tiene extremos absolutos en $(0, 1] \times (0, 1]$.

4. Determinar si existen los extremos absolutos de las siguientes funciones en los conjuntos dados y calcularlos cuando corresponda.

(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$ en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$ en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

(c) $f(x, y) = x^4 + 2x^2y - 2y^2 - 3x^2 + 1$ en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$.

(d) $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2-2x+2y+3}$ en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \geq 0, y \leq 0\}$.

5. Probar que $f(x, y) = y^2 - (y - 1)^3 x^2$ tiene un único extremo relativo y no tiene máximo ni mínimo absoluto en \mathbb{R}^2 .

6. Probar que $f(x, y) = x^4(1 - x - y) + y^4(2 - 3x + y)$ tiene un extremo relativo en $(0, 0)$.

7. Consideramos

$$f(x, y) = \begin{cases} \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Hallar si existen los extremos absolutos de f sobre $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

8. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 3y - 6 & \text{si } y \geq 2 \\ (x^2 - y)(y - 2) & \text{si } y < 2 \end{cases}.$$

1. Estudiar el signo de f .
 2. Hallar si existen los extremos relativos de f .
 3. Hallar si existen los extremos absolutos de f sobre $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$.
 4. Hallar si existen los extremos absolutos de f en \mathbb{R}^2 .
- 9.** Verificar que $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ tiene un punto crítico en $(1, 1, 1)$ y determinar la naturaleza de dicho punto.
- 10.** Encontrar y clasificar todos los puntos críticos de la función

$$f(x, y, z) = x^2z + y^2z + \frac{2}{3}z^3 - 4x - 4y - 10z + 1$$