

Práctico 2

1. Hacer un croquis de los conjuntos de nivel y de la gráfica de las siguientes funciones:

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 - y^2$
- (c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2$
- (d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy$
- (e) $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = y/x, X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

2. Probar que en los siguientes casos no existe el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad f(x, y) = \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x + y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$$

3. (a) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, y $a \in U$. Probar que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y g es una función acotada en alguna bola reducida de centro a , entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

(b) Probar que $\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Calcular los límites de la siguientes funciones para $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:

$$f(x, y) = x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^4}$$

4. Calcular:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 + xy + 1}{x^2 - x - y} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log |y| & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - y^2} \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}; & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x-y} - 1}{x^2 - y^2} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + x^3y} \end{aligned}$$

5. Se considera $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Mediante el cambio de variable $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, con $\theta \in [0, 2\pi)$ obtenemos $f(x, y) = g(r, \theta)$.

(a) Supongamos que $g(r, \theta) = h(r)k(\theta)$. Probar que si k está acotada en $[0, 2\pi)$ y $\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = 0$ entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

(b) Calcular:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

6. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $a \in U$. Probar que si $(x_k) \subset U$ y $x_k \xrightarrow[k]{} a$, entonces $f(x_k) \xrightarrow[k]{} f(a)$.

7. En cada caso hallar el dominio y estudiar la continuidad de f , donde f está definida por las siguientes fórmulas:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 \quad f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \quad f(x, y) = \operatorname{Arcsen}(x/\sqrt{x^2 + y^2})$$

8. Investigar la continuidad de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{si } x^2 + y^2 < 1, \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

9. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar que:

(a) Si $f(x) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) > 0$. (Conservación del signo.)

(b) $f^{-1}(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n: f(x) > a\}$ es un conjunto abierto.

(c) $f^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n: f(x) = a\}$ es un conjunto cerrado.

Utilizando (c) demostrar que el conjunto de puntos (x, y, z) de \mathbb{R}^3 que verifican

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

es un conjunto cerrado.

10. Sea $\| \cdot \|$ una norma en \mathbb{R}^n . Probar que la función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|$ es continua.