Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática I-agosto 2010

Nombre:	CI:

1. Se define la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x) = axe^x + b.$$

   a) (10 pts.) Hallar a y b para que la recta tangente al gráfico de f en $x = 0$ sea $y = x + 4$.

   b) Para $a = 3, b = 0$.

      1) (10 pts.) Hallar $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

      2) (10 pts.) Calcular el área encerrada entre el gráfico de $f(x)$ y el eje Ox en el intervalo $[-1, 1]$.

2. Se considera una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable que verifica:

   - h es estrictamente creciente,
   - $h(x) = x^3, \forall x \leq 0$,

   a) (10 pts.) Hallar dos puntos fijos de h y clasificarlos como soluciones de la ecuación en diferencias finitas $x_{n+1} = h(x_n)$.

   b) (10 pts.) Hallar un punto crítico de h y especificar si se trata o no de un extremo relativo.

   c) (10 pts.) Probar que $h(x) + x = 0$ si y sólo si $x = 0$ y deducir el signo de $h(x) + x$.

   d) (10 pts.) Supongamos que una determinada población se modela mediante la ecuación

$$x' = h(x) + x.$$

   ¿Qué sucederá a la larga con dicha población?

3. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, se considera la ecuación diferencial

$$\lambda x''(t) + 2x(t) = \frac{x'(t)\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}, \qquad t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

   a) (10 pts.) Para $\lambda = 1$, mostrar que la función $f(t) = k \operatorname{sen}^2(t)$ es solución de la ecuación, cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$.

   b) Para $\lambda = 0$:

      1) (10 pts.) Hallar todas las soluciones de la ecuación.

      2) (10 pts.) Verificar.

Solución Examen Matemática I - Agosto 2010

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a x e^{x} + b$

a) Recta tangente al gráfico en el punto $(0, f(0))$:

$$y = f'(0)\,x + f(0) \quad (= x + 4) \quad (*)$$

donde
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f'(x) = e^{x}(a + ax) \Rightarrow f'(0) = a \\ \bullet\ f(0) = b \end{array}\right\} (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ resulta $\underline{a = 1}$ y $\underline{b = 4}$.

b) $(a = 3,\ b = 0) \to f(x) = 3xe^{x}$

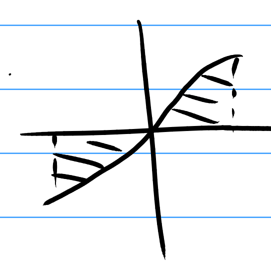
Primitiva de $f(x)$: $\int 3xe^{x}dx = 3\left(x \cdot e^{x} - \int e^{x}dx\right)$

$$= 3(xe^{x} - e^{x}) + C = 3e^{x}(x-1) + C.$$

1) Entonces por Barrow $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = 3e^{x}(x-1)\Big|_{-1}^{1} = -3e^{-1}(-1-1)$

$$= \underline{6e^{-1}}.$$

2) $sg(f(x))$ $\quad \underset{0}{\overset{-\quad\mid\quad+}{\rule{3cm}{0.4pt}}}$



$$\Rightarrow \text{Área} = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx = -\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$= -3e^{x}(x-1)\Big|_{-1}^{0} + 3e^{x}(x-1)\Big|_{0}^{1} = -3(-1) + 3e^{-1}(-2) + 3$$

$$= 6 - 6e^{-1} = \underline{6\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$$

② $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\begin{cases} \cdot\ h \text{ est. creciente} \\ \cdot\ h(x) = x^3 \quad x \leq 0 \end{cases}$, h derivable.

a) x es pto fijo de $h \iff h(x)=x$

Para $x \leq 0$: $h(x)=x \iff x^3 = x \iff x(x^2-1)=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$ $(x\leq 0)$.

Entonces $\underline{\underline{0}}$ y $\underline{\underline{-1}}$ son puntos fijos de h.

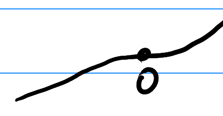
Consideramos la ec. en diferencias $x_{n+1} = h(x_n)$.
Como h es derivable, se tiene $h'(0) = \underbrace{(x^3)'|_{x=0}}_{\text{derivada de } x^3 \text{ en } x=0.} = 0$, y

$h'(-1) = 3x^2|_{x=-1} = 3$

Entonces: $|h'(0)| = 0 < 1 \implies 0$ es pto fijo $\underline{\underline{\text{atractor}}}$

$|h'(-1)| = 3 > 1 \implies -1$ es pto fijo $\underline{\underline{\text{repulsor}}}$

b) Puntos críticos $= \mathcal{C} = \{x : h'(x) = 0\}$



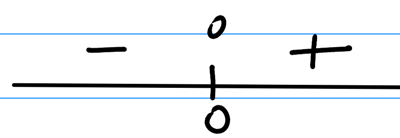
Como $h'(0)=0 \implies 0 \in \mathcal{C}$. Como h es estrictamente creciente resulta 0 es un punto SILLA.

c) Si $x > 0 \implies h(x) > h(0) = 0$ por ser est. creciente.

Entonces $h(x) + x > x > 0 \quad \forall x > 0$.

Analogamente, si $x < 0 \implies h(x) < h(0) = 0$ por ser est. creciente.
Entonces $h(x) + x < x < 0 \quad \forall x < 0$

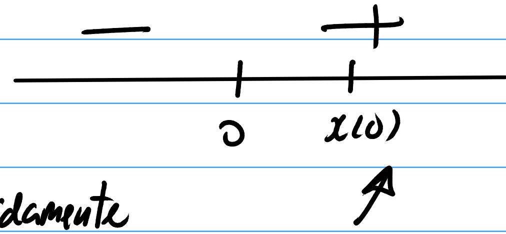
Concluimos que signo $(h(x)+x) =$



d) Consideremos la siguiente ec. dif. $x' = h(x) + x$.

Suponemos $x(0) > 0$ (población inicial).

Como $x'(t) = h(x(t)) + x(t) > 0$ para $x(t) > 0$, se tiene que $x(t)$ es creciente.



Además como no hay soluciones de $h(x)+x=0$ para $x>0$ se tiene que $x(t)$ crece indefinidamente a $+\infty$.

(3) $$\lambda x''(t) + 2x(t) = \frac{x'(t)\cdot\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}, \qquad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \quad (I)$$

a) $(\lambda=1)$ Sea $f(t) = k\cdot \operatorname{sen}^2(t)$, $k\in\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 2k\cdot\operatorname{sen}(t)\cdot\cos(t)$$
$$f''(t) = 2k\cos(t)^2 + 2k\operatorname{sen}(t)\cdot(-\operatorname{sen}(t)) = 2k\left(\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)\right)$$

$$\Rightarrow f''(t) + 2f(t) = 2k\left(\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)\right) + 2k\operatorname{sen}^2(t) = 2k\cdot\cos^2(t) \quad (*)$$

$$f'(t)\cdot\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} = 2k\cdot\operatorname{sen}(t)\cdot\frac{\cos^2(t)}{\operatorname{sen}(t)} = k\cdot\cos^2(t) \quad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ se tiene $f''(t) + 2f(t) = f'(t)\cdot\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}$, es decir $f(t)$ es solución de (I).

b) 1) $(\lambda=0)$ $$2x = x'\cdot\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} \Rightarrow x' = 2x\cdot\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} \quad \left(t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$\Rightarrow$ Si $x(t) \neq 0$, $\quad \dfrac{x'}{x} = 2\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = 2\int \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}\,dt$

de donde resulta

$$\log|x(t)| = 2\cdot\int \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}\,dt = \left\{\begin{array}{l} u = \cos(t) \\ du = -\operatorname{sen}(t)\,dt \end{array}\right\}$$

$$= -2\cdot\int \frac{du}{u} + C = -2\log|u| + C = -2\log|\cos t| + C$$

Entonces

$$\log|x(t)| = -2\log|\cos(t)| + C, \text{ de donde}$$

$$|x(t)| = e^{C}\cdot\frac{1}{|\cos(t)|^2}.$$

Resulta $\quad x(t) = K\cdot\dfrac{1}{\cos(t)^2}, \quad K \in \mathbb{R}$

2) $x'(t) = K\left(\dfrac{+2\cos(t)\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)^4}\right) = 2K\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)^3}$

$$\Rightarrow 2x(t) = 2K\cdot\frac{1}{\cos(t)^2} = 2K\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)^3}\,\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} = x'(t)\cdot\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}.$$