Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a la Topología
Primer semestre 2011

Práctico 10

1. En $\mathbf{R}^2$ con la topología usual se considera la relación de equivalencia $\sim$ asociada a la partición formada por los conjuntos $\mathbf{R}\times\{0\}$ y $C_x = \{(x,y) : y \neq 0\}$, para $x \in \mathbf{R}$. Probar que la proyección canónica no es cerrada ni abierta, y que $\mathbf{R}^2\backslash\sim$ verifica el primer axioma de numerabilidad.

2. Probar que $P\mathbf{R}^1$ es homeomorfo a S^1.

3. Sea $J = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

   (a) Sea $\sim$ la relación de equivalencia en J^2 que identifica los puntos $(1/2, t)$ y $(-1/2, t)$, para cada $t \in J$. Probar que $J^2\backslash\sim$ es homeomorfo al cilindro $x^2 + y^2 = 1, z \in J$.

   (b) Sea $\sim$ la relación de equivalencia en J^2 que identifica los puntos $(1/2, t)$ y $(-1/2, t)$ para cada $t \in J^2$ y los puntos $(u, 1/2)$ y $(u, -1/2)$ para cada $u \in J$. Probar que el espacio cociente $J^2\backslash\sim$ es homeomorfo al toro T^2.

   (c) Se considera en J^2 la relación de equivalencia $\sim$ que identifica, para cada t, los puntos $(-1/2, t)$ y $(1/2, -t)$. El espacio $J^2\backslash\sim$ se llama *cinta de Möbius*. Sea $\Phi : J^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, dada por

   $$\Phi(u,t) = ((1 - tsen(\pi u))cos2\pi u, ((1 - tsen(\pi u))sen2\pi u, , tcos(\pi u)).$$

   Probar que la función $\hat{\Phi}$ inducida por Φ en el cociente es un homeomorfismo entre la cinta de Möbius y la imagen de Φ en $\mathbf{R}^3$.

4. Si X es un espacio topológico, la *suspensión* de X se define por $SX = (X \times [-1,1])\backslash\sim$, donde $(x,y) \sim (x',y')$ sii $(x,y) = (x',y')$, o $y = y' = \pm 1$.

   Probar que la suspensión de S^n es homeomorfa a S^{n+1}.