Centro de Matemática
Facultad de Ciencias

Introducción a la Geometría Diferencial - 2011

Práctico 1

1. **Esferas**

   Definimos la esfera de dimensión n como:

   $$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

   Demostrar que S^n es una variedad diferencial para todo n. Calcular el espacio tangente a S^2 en $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

2. **Fibrados Tangentes**

   Denotamos por TS^2 el fibrado tangente a S^2, es decir:

   $$TS^2 = \{(p, v) : p \in S^2, v \in T_pS^2\}$$

   Demostrar que TS^2 es una variedad diferencial encajada en R^6. Esta variedad puede considerarse el espacio de estados de una particula que tiene restricción de moverse sobre la esfera, en particular es el espacio natural en el cual están definidas las ecuaciones de movimiento de un péndulo esférico. ¿Que dimensión tiene TS^2?

   Calcular el espacio tangente a TS^2 en el punto $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$. Mostrar que este punto tiene un entorno diffeomorfo a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (es decir dar una carta de un entorno de este punto).

   Repetir el ejercicio para TS^1 (i.e. mostrar que es variedad encajada en $\mathbb{R}^4$, calcular explícitamente el espacio tangente en algún punto, mostrar que un punto tiene un entorno diffeomorfo a $\mathbb{R}^2$).

3. **Productos**

   Mostrar que el conjunto $S^2 \times \mathbb{R}^2$ es una variedad differencial encajada en $\mathbb{R}^5$. Dar una carta de un entorno del punto $(e_1, 0)$.

   Vamos a poder demostrar que esta variedad no es diffeomorfa a TS^2. El motivo es que en $S^2 \times \mathbb{R}^2$ existe el "campo" continuo $(x, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ que nunca se anula. Mientras que en TS^2 vamos a demostrar que no existe un "campo" continuo sin ceros (esto es el teorema que los yanquis llaman por el extraño nombre "Hairy Ball Theorem", nombre que preferimos no traducir al español, puede resumirse diciendo que en todo momento hay un lugar de la tierra sin viento, o diciendo que no se puede "peinar" la esfera).

   La definición de "campo" en la discusión anterior, es una función continua $f : S^2 \mapsto TS^2$ tal que $f(x) \in T_x S^2$ para todo $x \in S^2$.

   Para contrastar con lo anterior, demostrá que TS^1 es difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$. Esto está bueno porque $S^1 \times \mathbb{R}$ está encajada en $\mathbb{R}^3$ (es un cílindro) mientras que TS^1, segun la definición que dimos, es una subvariedad encajada en $\mathbb{R}^4$.

4. **Proyectivos**

   Considera el conjunto de rectas por 0 en $\mathbb{R}^2$. Es obvio que hay una topología (i.e. algunas rectas están más cerca que otras, entre si). ¿Podés darle una estructura de variedad diferencial? Si pudiste, seguramente lo que te quedó fué RP^1. Mostrá que RP^1 es diffeomorfo a S^1.

   Del mismo modo se define RP^2 como el conjunto de rectas por el origen en $\mathbb{R}^3$ (dotada con una estructura diferencial que tenés que definir). Uno puede imaginarse RP^2, como S^2 pero con los puntos antipodales identificados (i.e. $x \in S^2$ representa el mismo punto de RP^2 que $-x$). Otra forma es imaginar un sólo hemisferio de S^2 pero con los puntos opuestos del círculo del borde identificados. Por último te lo podés imaginar como el plano $\mathbb{R}^2$, con un "círculo de direcciones en ∞" agregado (i.e. te vas por una recta hasta llegar a ∞ y reapareces por la misma recta pero del lado opuesto).

   Puede demostrarse que RP^2 no puede encajarse en $\mathbb{R}^3$. Demostrá que RP^2 puede encajarse en $\mathbb{R}^4$.

   Te podrás imaginar como se define RP^n.

5. **Toros**

   Una manera general de "identificar puntos" de una variedad para formar otras variedades se ejemplifica con la construcción del toro de dimensión n, que se denota T^n.

   El toro de dimensión n se define como:

$$T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

   La cosa interesante es que para todo punto $p \in \mathbb{R}^n$ se tiene que la bola $B(p, \frac{1}{2}) = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q - p\| < \frac{1}{2}\}$ no contiene dos puntos de la misma clase. Podemos entonces definir la topología en T^2 de modo que para todo $p \in \mathbb{R}^n$ y todo $\epsilon > 0$ las clases de los puntos de $B(p, \epsilon)$ sean un abierto en T^n. Además nos quedan definidos las biyecciones obvias entre estos abiertos de T^n y los puntos de las correspondientes bolas en $\mathbb{R}^n$. Usamos estas biyecciones como cartas para darle a T^n una estructura diferencial. Con lo cual queda una variedad (abstracta).

   Esto parece muy complicado, pero en realidad es la variedad más sencilla para calcular cosas, porque escencialmente tiene una única carta. La función $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$ que envía cada punto de $\mathbb{R}^n$ a su clase de equivalencia es sobreyectiva, y además cumple la propiedad de la "pila de discos" que es que cada punto de T^n tiene un entorno cuya preimagen por π es una unión disjunta de discos tales que la restricción de π a cada uno es un difeomorfismo. Por lo tanto $f : T^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable si y sólo si la función $F : \mathbb{R}^n \to T^n$ definida mediante $F = f \circ \pi$ es diferenciable.

   O sea que estudiar funciones diferenciables en T^n es lo mismo que estudiar funciones diferenciables y periódicas bajo todas las traslaciones de coordenadas enteras, en $\mathbb{R}^n$.

   Demostrar que T^1 (variedad abstracta) es difeomorfo a S^1.

   Demostrar que T^2 es difeomorfo a $S^1 \times S^1$.

   En general pasa que T^n es difeomorfo al producto de n veces S^1.

6. **Grupos de Matrices**

   Las matrices de $n \times n$ con entradas reales pueden identificarse con $\mathbb{R}^{n^2}$ (de varias maneras), y por lo tanto forman una variedad diferencial obviamente.

   Las matrices reales de determinante exáctamente igual a 1 ¿son una variedad diferencial?

Las matrices de $n \times n$ con entradas reales que preservan el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$ (i.e. son matrices invertibles que cumplen $A^* = A^{-1}$ donde A^* es la matriz transpuesta) son un subgrupo del grupo general lineal que se llama el grupo ortogonal y se denota $O(n) \subset \mathrm{GL}(n)$.

Mostrar que $O(n)$ es una variedad diferencial. Calcular el espacio tangente a $O(3)$ en la matriz identidad.

7. **Grassmannianas**

   La grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de subespacios de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ con una cierta estructura diferencial. Esto generaliza los espacios proyectivos $\mathrm{RP}^n = \mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^{n+1})$.

   Dar una estructura diferencial a $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$ y mostrar que es difeomorfo a $\mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^3) = \mathrm{RP}^2$. Este mismo truco sirve para mostrar que $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ va ser difeomorfo a $\mathrm{Gr}_{n-k}(\mathbb{R}^n)$.

   Esto muestra que hasta dimensión 3 no tenemos nada nuevo (las grassmannianas son proyectivos). La cosa se pone interesante con $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^4)$ la variedad formada por los planos por el origen en $\mathbb{R}^4$.

8. **Algunos problemas del libro de Milnor.**

   - **Milnor: Problema 8** Dadas dos variedades diferenciales $M \subset \mathbb{R}^k$ y $N \subset \mathbb{R}^l$, mostrar que el espacio tangente $T(M \times N)_(x, y)$ es igual a $TM_x \times TN_y$.
   - **Milnor: Problema 9** El gráfico Γ de un mapa diferenciable $f : M \to N$ se define como el conjunto de los pares $(x, y) \in M \times N$ con $f(x) = y$. Mostrar que Γ es una variedad diferenciable y que el espacio tangente

     $$T\Gamma_(x, y) \subset TM_x \times TN_y$$

     es igual al gráfico del mapa lineal df_x.
   - **Milnor: Problema 10** Dado una variedad diferencial $M \subset \mathbb{R}^k$ mostrar que el fibrado tangente:

     $$TM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^k : v \in TM_x\}$$

     es también una variedad diferencial. Mostrar que todo mapa diferenciable $f : M \to N$ da lugar a un mapa diferenciable:

     $$df : TM \to TN$$

     donde $d(\text{identidad}) = \text{identidad}$, $d(g \circ f) = (dg) \circ (df)$