

Práctico 9

- §1. Demostrar que  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  es una función biyectiva y biholomorfa entre el semiplano superior  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  y el disco unidad  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .  
Estudiar el comportamiento en el borde de  $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ .  
(Sugerencia: Recordar que  $\sin(2a) = 2 \tan(a)/(1 + \tan(a)^2)$  y  $\cos(2a) = (1 - \tan(a)^2)/(1 + \tan(a)^2)$ .)
- §2. Encontrar una función biyectiva y biholomorfa entre el primer cuadrante  $C = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0, \text{Re}(z) > 0\}$  y el disco unidad.
- §3. Sea  $n$  entero positivo. Probar que el mapa  $z \mapsto z^n$  es biyectivo y biholomorfo entre el sector  $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < \pi/n\}$  y  $\mathbb{H}$ .
- §4. Mostrar que  $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$  es biyectiva y biholomorfa entre la mitad superior del disco unidad  $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \text{Im}(z) > 0\}$  y el primer cuadrante, y estudiar el comportamiento en el borde de  $D^+ \subset \mathbb{C}$ .  
Encontrar un mapa biyectivo y biholomorfo entre  $D^+$  y  $D$ .
- §5. Sea  $\log(z)$  la versión del logaritmo con parte imaginaria en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . Esta función es discontinua en el eje real pero es biyectiva y biholomorfa en el semiplano superior. Describir explícitamente los conjuntos  $\log(H)$ ,  $\log(D^+)$  y  $\log(\mathbb{C} \setminus [0, +\infty))$ .
- §6. Demostrar que la función  $z \mapsto z + \frac{1}{z}$  es biyectiva y biholomorfa entre  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \text{Im}(z) > 0\}$  y  $H$ .
- §7. Para cada matriz de dos por dos y entradas complejas  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  se considera la función:  $f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Probar que  $M$  es invertible si y solo si la función  $f_M$  no es constante. Probar que dos matrices  $A$  y  $B$  invertibles determinan la misma función si y solo si existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $A = \lambda B$ . Demostrar que  $f_{AB} = f_A \circ f_B$  para todo par de matrices invertibles  $A, B$ , de modo que esta correspondencia es un morfismo de grupos (¡Ojo que no es un isomorfismo! ¿Cual es el núcleo?). Las transformaciones  $f_A$  para matrices invertibles  $A$  forman un grupo y suelen llamarse transformaciones de Möebius. El dominio natural de estas funciones es  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , ya que son continuas en  $\infty$  y tienen a lo sumo una única singularidad en  $\mathbb{C}$  que es un polo.
- §8. Demostrar que la imagen de cualquier círculo o recta en  $\mathbb{C}$  bajo el mapa  $z \mapsto \frac{1}{z}$  es un círculo o una recta.
- §9. Demostrar que toda transformación de Möebius se escribe como composición de los siguientes tipos de funciones:
- Rotohomotecias:  $z \mapsto \lambda z$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
  - Traslaciones:  $z \mapsto z + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$

- Inversion:  $z \mapsto \frac{1}{z}$

Deducir que toda transformación de Möbius envía rectas y círculos en rectas y círculos (como en el ejercicio anterior).

- §10. Si  $A$  es una matriz de dos por dos con coeficientes reales y determinante positivo demostrar que  $f_A(H) = H$ . Demostrar que si una transformación de Möbius  $f_B$  cumple  $f_B(H) = H$  entonces existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\lambda B$  es de coeficientes reales y determinante positivo.
- §11. Mostrar que una transformación de Möbius con 3 puntos fijos (uno de ellos posiblemente sea  $\infty$ ) es la identidad.

### Ejercicios Complementarios

*Automorfismos de  $\mathbb{D}$  y de  $\mathbb{H}$ .*

§1. Sea  $\varphi_\alpha(z) = \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$  donde  $\alpha \in \mathbb{D}$ .

- Probar que  $\varphi_\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .
- Probar que  $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha$ .
- Si  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  entonces existe  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{D}$  tal que  $f(z) = e^{i\theta} \varphi_\alpha$ .
- ¿Cuáles son los automorfismos del disco que fijan el origen?

§2. Sea  $\Gamma : \text{Aut}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H})$  dado por  $\Gamma(\psi) = F^{-1} \circ \psi \circ F$  donde  $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$  es el mapa  $F(z) = \frac{z-i}{z+i}$  dado en el Ejercicio §1. Probar que  $\Gamma$  es un isomorfismo de grupos.

§3. La idea de este ejercicio es clasificar  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ .  
Sea

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } \det(M) = 1 \right\}.$$

$SL_2(\mathbb{R})$  es el *grupo especial lineal*. Dada una matriz  $M \in SL_2(\mathbb{R})$ , sea  $f_M$  el mapa racional definido en el Ejercicio §7.

- Probar que  $f_M \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  para todo  $M \in SL_2(\mathbb{R})$ .
- Observa  $(M, z) \mapsto f_M(z)$  define una acción del grupo  $SL_2(\mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{H}$ . Probar que dicha acción es transitiva: i.e. dados  $z, w \in \mathbb{H}$  existe  $M$  tal que  $f_M(z) = w$ . (*Sugerencia:* Probar que podemos transformar  $z \in \mathbb{H}$  en  $i$ .)
- Dado  $\theta \in \mathbb{R}$ , sea  $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ . Probar que  $F^{-1} \circ f_{M_\theta} \circ F$  corresponde con la rotación de ángulo  $-2\theta$  en  $\mathbb{D}$ .
- Sea  $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ , y sea  $\gamma \in \mathbb{H}$  tal que  $f(\gamma) = i$ . Sea  $N \in SL_2(\mathbb{R})$  tal que  $f_N(i) = \gamma$ . Probar que existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $f = f_{M_\theta N^{-1}}$ .
- Probar que  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  es isomorfo a  $PSL_2(\mathbb{R}) := SL_2(\mathbb{R}) / \sim$ , donde  $M \sim M'$  sii  $M' = -M$ . El grupo  $PSL_2(\mathbb{R})$  se denomina *grupo especial lineal proyectivo*.