ANÁLISIS COMPLEJO. 2011

1. Cubrimientos, la función exponencial y el índice

La función exponencial se define en $z \in \mathbb{C}$ de la siguiente forma: si $z = x + iy$ entonces $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

Se prueban fácilmente las siguientes propiedades:

1. f es sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. La preimagen de un punto $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es el conjunto
$$f^{-1}(w) = \{x + (y + 2k\pi)i \ : \ k \in \mathbb{Z}, \ x = \log|w|, \ y \in arg(w)\},$$
donde $arg(w)$ es el argumento de w, es decir, el ángulo que forma el segmento que une 0 con w con el eje horizontal, medido en sentido antihorario.
3. La función f es diferenciable. En el punto $z = x + iy$ su diferencial tiene determinante igual a e^{2x}. Del teorema de la función inversa se deduce que f tiene una inversa local en cada punto de $\mathbb{C}$.

La inversa de f no existe ya que f no es inyectiva: como arriba, la preimagen de un $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es el conjunto $\log|w| + iarg(w)$. Sin embargo la inversa puede definirse en un punto si se elige una determinación principal para el argumento. Así, si se determina que $arg(w) \in (-\pi, \pi)$ tenemos que $\log(1) = 0$ y que $\log(i) = i\pi/2$. Con esta determinación del argumento, la función logaritmo queda bien definida y continua en el conjunto $\{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ : \ Im(w) = 0 \Rightarrow Re(w) > 0\}$.

Definición 1. *Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos de $\mathbb{R}^2$. Un mapa $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es un cubrimiento si es continuo sobreyectivo y cada $w \in \Omega_2$ tiene un entorno U tal que $f^{-1}(U)$ es igual a la unión disjunta de abiertos U_i y para cada i se cumple que la restricción de f a U_i es un homeomorfismo de U_i sobre U. Se dice que U es un entorno admisible del punto w.*

En particular, un cubrimiento es un homeomorfismo local, es decir, para cada $x \in \Omega_1$ existe un entorno V de x tal que la restricción de f a V es un homeomorfismo sobre su imagen. Sin embargo no es verdad, como algunos creen, que cualquier homeomorfismo local sobreyectivo sea un cubrimiento.

Por ejemplo, la función exponencial f es un cubrimiento de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero la restricción de f al conjunto de los $z = x + iy$ tales que $y \in (0, 3\pi)$ no lo es.
El resultado más importante de esta parte es:

Teorema 1. *Sea $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ un cubrimiento, $\gamma : [0, 1] \to \Omega_2$ una curva y $x \in \Omega_1$ tal que $f(x) = \gamma(0)$. Entonces existe una única curva $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to \Omega_1$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = x$ y $f\tilde{\gamma} = \gamma$.*

A una curva $\tilde{\gamma}$ tal que $f\tilde{\gamma} = \gamma$ se le llama un levantamiento de γ. Si además $\tilde{\gamma}(0) = x$, entonces $\tilde{\gamma}$ se llama el levantamiento de γ a partir de x.

Demostración: *Unicidad*: Sean α y β levantamientos de una curva γ. Como una curva es una función continua, resulta que el conjunto de puntos $t \in [0,1]$ donde α y β coinciden es cerrado. Pero además es abierto porque f es un homeo local: en efecto, si coinciden en t, se toma un entorno V restringido al cual f es un homeomorfismo; existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(t') \in V$ y $\beta(t') \in V$ para cualquier $t' \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Como $f|_V$ es inyectiva se deduce que α y β coinciden en $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. En conclusión, dos levantamientos de γ coinciden en un abierto y cerrado. Si además parten del mismo punto punto, entonces la conexión del intervalo implica que son iguales.
Existencia: Sea A el subconjunto de $[0,1]$ definido así: $t_0 \in A$ si existe una curva $\tilde{\gamma}_{t_0} : [0, t_0] \to \Omega_1$ que vale x en 0 y tal que $f\tilde{\gamma}_{t_0} = \gamma|_{[0,t_0]}$.
Evidentemente A es abierto, porque si $t_0 \in A$ se toma un entorno V de $\tilde{\gamma}_{t_0}(t_0)$ donde f sea un homeo y se extiende la curva a la derecha de t_0.
Para probar que A es cerrado, sea t_0 de acumulación de A. Es claro de la definición de A, que si algún $t' > t_0$ pertenece a A entonces también t_0 pertenece a A. Sea U un entorno admisible del punto $\gamma(t_0)$ y sea $t' < t_0$ perteneciente a A tal que $\gamma(t') \in U$, digamos que $\tilde{\gamma}_{t'}$ es un levantamiento de la restricción de γ a $[0,t']$. Sea U_i el único abierto de la preimagen de U que contiene al punto $\tilde{\gamma}_{t'}(t')$. Defina $\tilde{\gamma}_{t_0}(t)$ como $\tilde{\gamma}_{t'}(t)$ para $t \le t'$ y como $(f|U_i)^{-1}(\gamma(t))$ para $t \in (t', t_0]$. Así definida, $\tilde{\gamma}_{t_0}$ es continua en $[0, t_0]$ y su imagen por f es la restricción de γ a $[0,t_0]$, por lo tanto $t_0 \in A$. $\square$

Por ejemplo, considere la función exponencial f; sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definida por $\gamma(t) = \cos(2\pi t) + i \operatorname{sen}(2\pi t)$. Entonces el único levantamiento de la curva γ que empieza en $z = 1$ es $\tilde{\gamma}(t) = 2\pi i t$.
Una de las consecuencias interesantes de este resultado es la siguiente definición de índice de una curva respecto de un punto. Sea $a \in \mathbb{C}$ y $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ una curva cerrada (que significa $\gamma(0) = \gamma(1)$). Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = \gamma(0) - a$ y $\tilde{\gamma}$ el único levantamiento (por la función exponencial) de la curva $t \to \gamma(t) - a$ a partir de z. Sea $w = \tilde{\gamma}(1)$. Como $e^w = e^z$ (porque la curva γ es cerrada) se deduce que $w - z = 2k\pi i$ para algún k entero. Veamos que k no depende de la elección del punto z. Sea z_1 tal que $e^{z_1} = \gamma(0) - a$. Entonces existe un entero j tal que $z_1 = z_0 + 2j\pi i$, de donde $t \to \tilde{\gamma}(t) + 2j\pi i$ es un levantamiento de $\gamma(t) - a$ a partir de z_1. Por el teorema 1, éste es el único levantamiento. Se concluye que k no depende del z elegido, lo que nos permite definir el índice.

Definición 2. *Sea $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ una curva cerrada. El índice de γ respecto de a se define como*
$$ind_\gamma(a) = \frac{\tilde{\gamma}(\beta) - \tilde{\gamma}(\alpha)}{2\pi i},$$
donde $\tilde{\gamma}$ es un levantamiento de $\gamma(t) - a$ por la función exponencial.

Observe que si $exp(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t) - a$, entonces
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \tilde{\gamma}'(t) dt = \frac{\tilde{\gamma}(\beta) - \tilde{\gamma}(\alpha)}{2\pi i} = ind_\gamma(a).$$

Esta fórmula da una expresión integral para el índice.

Proposición 1. *El índice es un número entero, constante en cada componente conexa del complemento de γ^* y vale 0 en la componente no acotada del complemento de γ^*.*

2. Homotopías, conexión simple

Definición 3. *Sea Ω contenido en $\mathbb{C}$, x e y puntos en Ω. Denotamos por $C_\Omega(x,y)$ al conjunto de curvas $\gamma : [0,1] \to \Omega$ tales que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Dos curvas α y β en $C_\Omega(x,y)$ son Ω-homotópicas si existe una familia (indexada con $s \in [0,1]$) de curvas $\gamma_s \in C_\Omega(x,y)$ tales que $\gamma_0 = \alpha$ y $\gamma_1 = \beta$ y además $(t,s) \to \gamma_s(t)$ es una función continua de $[0,1]^2$ en Ω.*
A la función $H(t,s) = \gamma_s(t)$ se le llama homotopía de α a β.
Diremos que Ω es simplemente conexo si es conexo por caminos y para todo $x \in \Omega$ cualquier curva en $C_\Omega(x,x)$ es homotópica a la curva constante 1_x ($1_x(t) = x$ para todo t).

Observación 1.
1. *Podemos dotar a $C_\Omega(x,y)$ de la topología de la convergencia uniforme. Entonces α y β son Ω-homotópicas si y sólo si hay una curva en $C_\Omega(x,y)$ que une α con β o sea si y sólo si α y β están en la misma componente conexa por caminos de $C_\Omega(x,y)$ o también si y sólo si $C_{C(x,y)}(\alpha,\beta)$ es no vacío.*
2. *Si Ω es conexo por caminos entonces es simplemente conexo sii vale la propiedad para* algún *punto x de Ω.*
3. *Es fácil ver que un convexo es simplemente conexo y que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no lo es.*
4. *También se prueba que Ω es simplemente conexo si y sólo si para cualquier par de puntos x e y en Ω se cumple que $C_\Omega(x,y) \neq \emptyset$ y que dos curvas cualesquiera en $C_\Omega(x,y)$ son siempre Ω-homotópicas.*

Lema 1. *Sea $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ un cubrimiento y sea H una homotopía entre dos curvas de $C_{\Omega_2}(x,y)$. Sea $z \in \Omega_1$ tal que $f(z) = x$. Para cada curva $H_s(t) = H(t,s)$ sea $\tilde{H}_s$ su levantado a partir de z. Defina $\tilde{H}(t,s) = \tilde{H}_s(t)$. Entonces $\tilde{H}$ es continua.*

Demostración: Sea $(t',s') \in [0,1]^2$, U' un entorno de $\tilde{H}(t',s')$, $\mathcal{U}$ un cubrimiento finito de la imagen de la curva $H_{s'}|_{[0,t']}$ formado por entornos admisibles. Exigimos, además, que un sólo elemento $\hat{U}$ de $\mathcal{U}$ contenga al punto $H_{s'}(t')$ y tal que $f(U') \supset \hat{U}$. Sea $\mathcal{V}$ el cubrimiento finito de $[0,t']$ formado por los abiertos $H_{s'}^{-1}(U)$ con $U \in \mathcal{U}$. Sea ρ un número de Lebesgue del cubrimiento $\mathcal{V}$ y k el máximo natural tal que $k\rho \leq t'$; definamos $t_j = \rho j$, $t_{k+1} = t'$. Numeramos entonces los abiertos de $\mathcal{U}$ de forma que $H_{s'}([t_j, t_{j+1}]) \subset U_j$ para cada $0 \leq j \leq k$. Notar que $U_k = \hat{U}$ está contenido en $f(U')$.

Como cada U_j es un abierto admisible, existen $U'_0, \ldots, U'_k$ abiertos en Ω_1 tales que f es un homeomorfismo de U'_j a U_j para cada j y $\tilde{H}_{s'}(t_j) \in U'_j$. Notar aquí que U'_k está contenido en U'.

Veamos ahora que para cada j existe un entorno W_j de s' tal que $\tilde{H}_s(t_j)$ pertenece a U'_j para cualquier $s \in W_j$. Se prueba por inducción. Si es verdadero hasta j, observe que la restricción de $\tilde{H}_s$ al conjunto $[t_j, t_{j+1}]$ es igual a $(f|_{U'_j})^{-1}(H_s(t))$, por la unicidad de los levantamientos. Tomando $W_{j+1} \subset W_j$ de manera que $H_s(t_{j+1}) \in f(U'_j \cap U'_{j+1})$ para cualquier $s \in W_{j+1}$, resulta que $\tilde{H}_s(t_{j+1})$ está en U'_{j+1}. Esto prueba la inducción.

En particular, $\tilde{H}_s(t) \in U'_k \subset U'$ si $|s \in \cap_0^k W_j$ y $|t - t'| < \varepsilon$.

□

Teorema 2. *Sea $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ un cubrimiento, x e y puntos en Ω_2 y $z \in \Omega_1$ tal que $f(z) = x$. Sean α y β en $C(x,y)$ cuyos levantamientos a partir de z se denotan por $\tilde{\alpha}$*

y $\tilde{\beta}$ respectivamente. Si α y β son Ω_2-homotópicas entonces $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Si además Ω_1 es simplemente conexo, entonces el recíproco es cierto, es decir $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ implica que α y β son Ω_2 homotópicas.

Demostración: Denotamos por $\tilde{\gamma}_s$ al único levantamiento de γ_s a partir de z. Observe que por el lema anterior $(s,t) \in [0,1]^2 \to \tilde{\gamma}_s(t) \in \Omega_1$ es continua. Como $\{\tilde{\gamma}_s(1) \ : \ s \in [0,1]\}$ está contenido en $f^{-1}(y)$ que es discreto, se deduce la primera afirmación.
Para probar el recíproco suponga que Ω_1 es simplemente conexo. Por hipótesis, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ terminan en el mismo punto, digamos w; en otras palabras, ambas curvas pertenecen a $C_{\Omega_1}(z,w)$. Como Ω_1 es simplemente conexo, resulta de la observación anterior que son homotópicas vía una homotopía que llamamos H. Es claro que fH es una homotopía de α a β. □

Corolario 1. *Sean α y β curvas Ω-homotópicas. Entonces $ind_\alpha(a) = ind_\beta(a)$ para todo $a \notin \Omega$.*

Demostración: Sea a un punto fuera de Ω, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ levantamientos según la exponencial de $\alpha - a$ y $\beta - a$ a partir del mismo punto. Entonces el índice es el mismo porque $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ terminan en el mismo punto. □

Como veremos, el recíproco del corolario enunciado arriba también es verdadero.

Teorema 3. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Ω es un abierto del plano simplemente conexo.*
2. *Para cualquier curva cerrada γ contenida en Ω se cumple que $ind_\gamma(a) = 0$ para todo $a \notin \Omega$.*
3. *Para toda $f \in H(\Omega)$ y γ curva cerrada contenida en Ω se cumple que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*
4. *Para toda $f \in H(\Omega)$ existe $F \in H(\Omega)$ tal que $F' = f$.*
5. *Para toda $f \in H(\Omega)$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, existe una función $\tilde{f}$ holomorfa en Ω tal que $\exp(\tilde{f}) = f$.*
6. *Con la misma hipótesis de la parte anterior, existe una $g \in H(\Omega)$ tal que $g^2 = f$.*

Demostración: Si Ω es vacío el resultado es trivial.
1) implica 2) por definición de simplemente conexo y por el corolario 1 enunciado arriba.
2) implica 3) por el teorema global de Cauchy.
3) implica 4) : Sea $z_0 \in \Omega$. Para cada $z \in \Omega$ sea $\gamma \in C_\Omega(z_0, z)$ y defina $F(z) = \int_\gamma f(\xi)d\xi$. Entonces F está bien definida por hipótesis y es clásico que si derivada es f.
4) implica 5) : Como $f \neq 0$ en Ω, resulta que f'/f es holomorfa en Ω. Por hipótesis existe $g \in H(\Omega)$ tal que $g' = f'/f$. Se deduce que la derivada de $e^g/f = 0$, y por lo tanto $e^g = Kf$ para alguna constante K. Como $K \neq 0$, resulta que existe k tal que $e^k = K$. Entonces $e^{(g-k)} = f$.
5) implica 6) : Sea $\tilde{f}$ tal que $exp(\tilde{f}) = f$ y defina $g = \exp(\tilde{f}/2)$.
6) implica 1) : Usamos el teorema de Riemann:
Si $\Omega \neq \mathbb{C}$ y toda función en $H(\Omega)$ que no se anula en Ω tiene una raíz cuadrada holomorfa, entonces existe una biyección holomorfa de Ω en $\mathbb{D}$. Por lo tanto la hipótesis de 6) del teorema anterior implica que existe una biyección holomorfa de Ω a $\mathbb{D}$ o que $\Omega = \mathbb{C}$. En ambos casos es trivial que Ω es simplemente conexo.

□

Vale la pena enunciar el Teorema de Riemann en su versión más famosa:
Teorema de Riemann. Sea Ω un abierto simplemente conexo distinto de $\mathbb{C}$. Entonces existe una función holomorfa y biyectiva $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

3. Equivalencia conforme, grupo de cubrimiento.

Recordamos de los ejercicios los siguientes resultados:
1. Si f es una función holomorfa en Ω y $f'(a) \neq 0$ para un punto $a \in \Omega$, entonces f preserva ángulos en a.
2. Pero si $f'(a) = 0$ entonces f no presrva ángulos en a.
3. A modo de recíproco, si f es clase C^1 en Ω y preserva ángulos en cada punto de Ω entonces es holomorfa en Ω y su derivada jamás se anula.

Definición 4. *Un mapa f se dice conforme en Ω si está en $H(\Omega)$ y su derivada es distinta de cero en todo punto. Dos abiertos del plano se dicen conformemente equivalentes si existe una biyección holomorfa de uno a otro. Un mapa f es un automorfismo de Ω si $f : \Omega \to \Omega$ es holomorfa y biyectiva. El conjunto de todos los automorfismos de Ω se denota $Aut(\Omega)$.*

La relación definida es de equivalencia.

Por ejemplo dos abiertos simplemente conexos, ambos distintos de $\mathbb{C}$, son conformemente equivalentes. El único abierto del plano conformemente equivalente a $\mathbb{C}$ es el propio $\mathbb{C}$.

Ya vimos cómo se levantan curvas y homotopías. Ahora veremos que cualquier mapa definido en un simplemente conexo se puede levantar de manera única salvo una condición inicial.

Teorema 4. *Sea $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ un cubrimiento, $h : S \to \Omega_2$ un mapa continuo, donde S es simplemente conexo. Dado un punto $z_0 \in S$ y un punto $w_0 \in \Omega_1$ tales que $f(w_0) = h(z_0)$, existe un único levantado continuo $\tilde{h}$ de h que vale w_0 en z_0; es decir, $\tilde{h}$ verifica dos condiciones: $f\tilde{h} = h$, $h(z_0) = w_0$.*
Si además f y h son holomorfas, entonces $\tilde{h}$ también lo es.

Demostración: *Existencia.* La $\tilde{h}$ se define en un punto $z \in S$ de la siguiente forma. Se toma una curva $\gamma \in C_S(z_0, z)$, se lleva con h a Ω_2, luego se levanta $h\gamma$ por f a partir de w_0, y se define $\tilde{h}(z)$ como el punto final de esta curva. En otros términos,

$$\tilde{h}(z) = \tilde{f\gamma}(1),$$

donde $\tilde{f\gamma}$ es el levantado de $f\gamma$ con punto inicial w_0.

Hay que probar que el resultado $\tilde{h}(z)$ no depende de la curva γ escogida. Si $\alpha \in C_S(z_0, z)$ entonces α y γ son S-homotópicas de donde se deduce que $h\gamma$ y $h\alpha$ son Ω-homotópicas. Por lo tanto, sus levantamientos a partir del punto w_0 terminan en el mismo punto, por el teorema 2.

Obviamente $\tilde{h}(z_0) = w_0$ y $f\tilde{h} = h$.

Veamos que $\tilde{h}$ es continua. Sea $z \in S$ y W un entorno de $\tilde{h}(z)$; existe U, un entorno admisible de $f(z)$, tal que f restringida a $f^{-1}(U) \cap W$ es un homeo local. Finalmente sea D un disco entorno de z tal que $h(D) \subset U \cap f(W)$. Sea γ una curva cualquiera que une z_0 con z. Dado $w \in D$ sea γ_1 la curva γ seguida del segmento s contenido en D que une z con w. Entonces $\tilde{h}(w) = \tilde{h\gamma_1}(1)$ donde $\tilde{h\gamma_1}$

es el levantamiento (según f) de $h\gamma_1$ a partir de w_0. Si $\widetilde{h\gamma}$ es el levantado de $h\gamma$ a partir de w_0, es obvio que $\widetilde{h\gamma_1}$ es igual a $\widetilde{h\gamma}$ seguida de $f^{-1}(hs) \cap W$. Por lo tanto $\tilde{h}(w) = \widetilde{h\gamma_1}(1) = f^{-1}(hs(1)) \in W$. Esto prueba la continuidad.

Para probar que $\tilde{h}$ es holomorfa si f y h lo son, y continuando con la notación del párrafo anterior, notar que $\tilde{h}(D) = (f|_W)^{-1}h$, o sea $\tilde{h}|_D$ es composición de holomorfas.
Unicidad.

Sea h' otra solución. Si $\tilde{h}(z)$ y $h'(z)$ coinciden, entonces el argumento anterior muestra que h y h' coinciden en D. Se deduce que el conjunto de puntos donde coinciden es abierto y cerrado, pero como coinciden en z_0 resulta que son iguales porque S es conexo. $\square$

Definición 5. *Sea $f : S \to \Omega$ un cubrimiento, donde S es simplemente conexo. Se define el grupo de cubrimiento asociado a f como*

$$\Gamma_f = \{\varphi : S \to S \ / \ \varphi \in H(S) \ , \ f\varphi = f\}$$

Obviamente, la composición de elementos de Γ_f está en Γ_f. La identidad de S también está en Γ_f.
Observación fundamental:
Si φ está en Γ_f, entonces φ resulta un levantamiento de la propia f, como en el teorema anterior. Hay dos conclusiones importantes.

De la existencia demostrada en el teorema resulta que dados dos puntos cualesquiera de $f^{-1}(z)$, existe un elemento de Γ_f que lleva uno en el otro.

De la unicidad demostrada en aquel teorema resulta que φ está determinada una vez se conoce su valor en un punto.

En consecuencia, cada $\varphi \in \Gamma_f$ es un automorfismo de S, porque si $\varphi(z) = w$, existirá una $\psi \in \Gamma_f$ que lleva w en z, luego $\varphi\psi$ lleva w en w y es también un elemento de Γ_f, o sea, es la identidad. De forma similar, $\psi\varphi$ es la identidad de S. Se concluye también que Γ_f es un subgrupo de $Aut(S)$.

Supongamos ahora que Ω es un abierto del plano, que S_1 y S_2 son simplemente conexos y que existen cubrimientos $f_1 : S_1 \to \Omega$, $f_2 : S_2 \to \Omega_2$. Afirmamos que S_1 y S_2 son conformemente equivalentes. En efecto, sea $z \in \Omega$ y tomemos $z_i \in f_i^{-1}(z)$ para $i = 1, 2$. Existe un levantamiento g_1 de f_1 por el mapa f_2 que lleva z_1 en z_2 y un levantamiento g_2 de f_2 por el mapa f_1 que lleva z_2 en z_1. Ahora g_1g_2 lleva S_2 en S_2 y fija el punto z_2: es por lo tanto, la identidad de S_2. De forma similar, g_2g_1 es la identidad de S_1. Se deduce que S_1 y S_2 son conformemente equivalentes.

Ejercicio 1. *Sea S simplemente conexo, $f : S \to \Omega_1$ un cubrimiento y $g : \Omega \to \Omega_1$ un cubrimiento, donde Ω no es necesariamente simplemente conexo. Probar que existe un cubrimiento h de S en Ω. Además h es inyectivo sii Ω es simplemente conexo.*
Por este motivo, al cubrimiento f se le llama el cubrimiento universal de Ω_1.

Existe una generalización del teorema de Riemann que no demostraremos.

Teorema de uniformización. *Dado cualquier abierto Ω del plano, existe un cubrimiento $f : S \to \Omega$, donde S es un abierto simplemente conexo del plano.*

Por los comentarios anteriores se deduce que S sólo puede ser $\mathbb{D}$ o $\mathbb{C}$ y que si es uno no es el otro, es decir: qué conjunto simplemente conexo cubre a un determinado Ω es una propiedad de Ω. Se dice que Ω es hiperbólico si su cubrimiento es con el disco y que es parabólico si es con el plano. También el plano ampliado $\bar{\mathbb{C}}$ es simplemente conexo, pero como es compacto, sólo cubre conjuntos compactos, el único subconjunto compacto y abierto de $\bar{\mathbb{C}}$ es el propio $\bar{\mathbb{C}}$. También $\bar{\mathbb{C}}$ se llama elíptico. Las razones de estos nombres tienen que ver con la geometría, como veremos a continuación.

4. Geometría conforme.

Definición 6. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Una métrica conforme en Ω es una función $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$ de clase C^2. Dada una curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$ se define su longitud respecto de ρ como*

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\rho(\gamma(t))dt.$$

Se define en Ω una distancia asociada a ρ de la siguiente forma:

$$d_\rho(x, y) = \text{ínf}\{\ell_\rho(\gamma) \;:\; \gamma \in C_\Omega(x, y)\}.$$

Para demostrar que es una distancia, observe que si $|z - a| \geq r$, y $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ va de a a z, entonces

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\rho(\gamma(t))dt \geq r. \text{mín}\{\rho(z) \;:\; z \in \bar{\mathbb{D}}(a; r)\},$$

y por lo tanto $z \neq a$ implica $d_\rho(a, z) > 0$. El resto de las propiedades de una métrica se verifican fácil.

Ejercicio 2. *Probar que la topología inducida en Ω por esta métrica es la topología usual de Ω como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.*

Sea ρ métrica en Ω_2 y $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ conforme. Se define el pullback de ρ por f como la métrica $f^*(\rho)(z) = |f'(z)|\rho(f(z))$. Observar que es una métrica porque $f'(z) \neq 0$. Si γ es una curva en Ω_1, entonces la longitud de $f\gamma$ según ρ es

$$\ell_\rho(f\gamma) = \int_0^1 |(f\gamma)'(t)|\rho_2(f\gamma(t))dt = \int_0^1 |\gamma'(t)|\rho(f(\gamma(t))|f'(\gamma(t))|dt = \ell_{f^*(\rho)}(\gamma).$$

Por lo tanto, $f : (\Omega_1, f^*(\rho)) \to (\Omega_2, \rho)$ preserva las longitudes de las curvas.

Lema 2. *Sea f una biyección holomorfa de (Ω_1, ρ_1) en (Ω_2, ρ_2). Si $\rho_1 = f^*(\rho_2)$, entonces f es una isometría de $(\Omega_1, d_{\rho_1}) \to (\Omega_2, d_{\rho_2})$.*

La demostración es obvia a partir de la observación anterior.

Ejercicio 3. *Probar el recíproco, es decir que si f es conforme y biyectiva y f es una isometría de los espacios métricos, entonces f preserva las longitudes de curvas y esto implica que el pullback de ρ_2 es igual a ρ_1.*

Definición 7. *Diremos que una $f : (\Omega_1, \rho_1) \to (\Omega_2, \rho_2)$ holomorfa es una isometría conforme si $f^*(\rho_2) = \rho_1$.*

Analicemos brevemente la relación entre el concepto de isometría conforme e isometría de espacios métricos.

Observación 2.
1. *En primer lugar, una isometría de los espacios métricos no tiene que ser holomorfa necesariamente.*
2. *Además, una isometría conforme f no tiene porqué ser una isometría de los espacios métricos asociados, ya que no necesariamente f es biyectiva (en varias aplicaciones f será un cubrimiento). Sin embargo, toda isometría conforme es una isometría local de los espacios métricos, ya que es biyectiva cuando restringida a un entorno.*
3. *En el caso en que f sea conforme y biyectiva, no hay confusión posible ya que f es isometría conforme sii es isometría de espacios métricos.*

Ejemplos. Veamos los tres ejemplos más famosos.
1. Defina $\tau(z) = 1$ en $\mathbb{C}$. Esta es la métrica usual del plano, que define la distancia euclídea.
2. La métrica de Poincaré en el disco unidad se define como:
$$\rho(z) = \frac{1}{1-|z|^2}.$$
Luego se estudiarán sus propiedades.
3. Se define también la métrica cordal en $\bar{\mathbb{C}}$ como $\sigma(\infty) = 0$ y
$$\sigma(z) = \frac{1}{1+|z|^2},$$
para $z \in \mathbb{C}$.

   En este ejemplo no se cumple que σ sea siempre positiva, pero también se admite como una métrica. En general se admiten métricas que valen 0 en puntos aislados, y valen las afirmaciones hechas arriba, pero complica las cuentas así que no las consideraremos.

Ahora nos concentramos en el disco de Poincaré.

Lema 3. *Todo automorfismo de $\mathbb{D}$ es una isometría de $(\mathbb{D}, d_\rho)$.*

La demostración es una cuenta. Como sabemos cuales son exactamente los automorfismos de $\mathbb{D}$, sólo resta mostrar que $\rho(\varphi(z))|\varphi'(z)| = \rho(z)$ para cada automorfismo de $\mathbb{D}$.

Lema de Schwarz en otra versión. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa. Si f no es una isometría, entonces
$$d_\rho(f(z), f(w)) < d_\rho(z, w),$$
para todo $z \neq w$ en $\mathbb{D}$.
Demostración. Sea $a \in \mathbb{D}$ y $f(a) = b$. Entonces $g = \varphi_b f \varphi_{-a}$ lleva $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ y 0 en 0. Si $|g'(0)| = 1$, entonces g es una isometría por el lema de Schwarz, y por lo tanto lo es también f. Si no, resulta lo siguiente:
$$1 > |g'(0)| = |\varphi_b'(b)f'(a)\varphi_{-a}'(0)| = |\frac{\rho(b)}{\rho(\varphi_b(b))}f'(a)\frac{\rho(0)}{\rho(\varphi_{-a}(0))} = \frac{\rho(b)}{\rho(a)}|f'(a)|$$
Luego $\rho(f(a))|f'(a)| < \rho(a)$. Esto vale para todo $a \in \mathbb{D}$, así que un argumento simple a partir de la definición de la distancia, muestra que f decrece distancias.

Ejercicio 4. *Probar el lema de Schwarz usando esta versión.*

Ejercicio 5. *Probar que una función holomorfa de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ tiene a lo más un punto fijo o es la identidad. ¿Hay alguna sin puntos fijos?*

Ejercicio 6. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa que deja invariante un subconjunto compacto K de $\mathbb{D}$. Probar que si f no es una isometría, entonces la restricción de f a K es una contracción del espacio métrico K con la distancia d_ρ.*

Calcularemos las geodésicas del disco de Poincaré. En general se llaman geodésicas a las curvas que minimizan la distancia localmente. En el plano con la métrica usual son las rectas.

Sea $x \in (0,1)$: Sea γ una curva que une 0 con x y supongamos en primer término que $\gamma(t) = (t, h(t))$ para $t \in [0,x]$. Entonces

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_0^x \frac{\sqrt{1+(h'(t))^2}}{1-t^2-h(t)^2}dt \geq \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Se propone como ejercicio completar el caso restante, es decir cuando γ no es la gráfica de una función definida en $[0,x]$. Como la curva $\alpha(t) = t$ para $t \in [0,x]$ satisface el igual en la desigualdad de arriba, resulta que esta curva realiza la mínima distancia entre 0 y x. Es sabido que las rotaciones son isometrías, que junto con lo anterior implican que la curva que minimiza la distancia entre 0 y $z \in \mathbb{D}$ es el segmento que une 0 con z. Se tiene la siguiente conclusión:

Lema 4. *Sean α y β puntos cualesquiera en $\mathbb{D}$; si s es el segmento que une 0 con $\varphi_{-\alpha}(\beta)$, entonces la curva que minimiza la distancia entre α y β es $\varphi_\alpha s$.*

Ejercicio 7. *Hallar la distancia entre α y β. Probar que $(\mathbb{D}, d_\rho)$ es un espacio métrico completo.*

5. $Aut(\Omega)$

El teorema de la sección 3 permite determinar el grupo de automorfismos y asignar una métrica a cualquier abierto del plano que sea cubierto por $\mathbb{D}$.

Teorema 5. *Sea $f : \mathbb{D} \to \Omega$ un cubrimiento y ψ un automorfismo de Ω. Sea $z_1 \in \Omega$ y $z_2 = \psi(z_1)$. Dados puntos z_1' y z_2' en $\mathbb{D}$ tales que $z_i' \in f^{-1}(z_i)$ para $i = 1, 2$, existe un único automorfismo φ de $\mathbb{D}$ que cumple:*

1. $f\varphi = \psi f$
2. $\varphi(z_1') = z_2'$.

Demostración: Como ψf también es un cubrimiento de $\mathbb{D}$ en Ω, resulta que existe una única $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ que cumple (1) y (2). Usando el mismo argumento que probaba que cada elemento de Γ_f es un automorfismo, concluimos que φ es biyectiva. $\square$

Ejercicio 8. *Si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \to \Omega$ es un cubrimiento holomorfo, entonces es biyectiva.*

Ejercicio 9. *Para $i = 1, 2$, sean $f_i : S \to \Omega_i$ cubrimientos, donde S es simplemente conexo. Si Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes, entonces Γ_{f_1} y Γ_{f_2} son grupos conjugados, es decir, existe $\psi \in Aut(S)$ tal que*

$$\varphi \in \Gamma_{f_1} \to \psi\varphi\psi^{-1} \in \Gamma_{f_2}$$

es una biyección.

Ejercicio 10. *Por los teoremas vistos arriba, no puede existir un cubrimiento de* H^+ *en* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$*. Explicar usando la definición de cubrimiento porqué la función exponencial restringida a* H^+ *no es cubrimiento sobre* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$*.*

Ejercicio 11. *Sean* φ_1 *y* φ_2 *holomorfas tales que* $f\varphi_1 = f\varphi_2$*. Probar que existe* $\varphi \in Aut(S)$ *tal que* $\varphi_1 = \varphi\varphi_2$*. Deducir que* φ_1 *y* φ_2 *son ambas constantes o ambas biyectivas.*

Teorema 6. *Sea* $f : \mathbb{D} \to \Omega$ *un cubrimiento. Entonces existe una métrica en* Ω *respecto a la cual todo automorfismo de* Ω *es una isometría. Esta se llama la métrica hiperbólica de* Ω*.*

Demostración: Si ρ_Ω es una métrica en Ω tal que f es una isometría conforme, debe cumplirse $\rho_\Omega(f(z))|f'(z)| = \rho(z)$, siendo ρ la métrica de Poincaré $\mathbb{D}$. La idea es definir $\rho(w)$ como $\rho(z)/|f'(z)|$ donde z es una preimagen por f de w. Veamos que esta cantidad no depende del punto $z \in f^{-1}(w)$. Si $f(z_1) = f(z)$, existe $\varphi \in \Gamma_f$ tal que $\varphi(z_1) = z$. Usando que φ es una isometría conforme de la métrica de Poincaré

$$\frac{\rho(z_1)}{|f'(z_1)|} = \frac{\rho(z)|\varphi'(z_1)|}{|f'(z_1)|} = \frac{\rho(z)}{|f'(z)|},$$

la última igualdad porque $f\varphi = f$. Esto prueba que puede definirse ρ_Ω de forma que f sea una isometría conforme. Si $\psi \in Aut(\Omega)$, sea φ como en el teorema anterior, es decir tal que $f\varphi = \psi f$. Como f y φ son isometrías, resulta que ψ también lo es.

Ejercicio 12. *La razón del nombre hiperbólica para esta métrica radica en la geometría: dados una geodésica* γ *de* (Ω, ρ_Ω) *y un punto* p *que no pertenenece a* γ*, existen infinitas geodésicas que pasan por* p *y no tocan* γ*.*

Ejercicio 13. *Probar que* Ω *con la distancia inducida por la métrica definida arriba es un espacio métrico completo.*

6. Ejemplos.

6.1. La exponencial otra vez. Sea f la función exponencial. Como vimos, es un cubrimiento de $\mathbb{C}$ sobre $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Por el teorema 5, para todo automorfismo ψ de Ω existe $\varphi \in Aut(\mathbb{C})$ tal que

$$f\varphi = \psi f. \tag{1}$$

Pero no es cierto que para todo $\varphi \in Aut(\mathbb{C})$ exista $\psi \in Aut(\Omega)$ que cumpla la ecuación 1. En efecto, para que un mapa $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induzca un mapa en Ω tal que se cumpla la ecuación 1, es necesario y suficiente que $f(\varphi(z_1)) = f(\varphi(z_2))$ para todo par de puntos z_1 y z_2 en $\mathbb{C}$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Usando que f es la exponencial tomemos dos puntos $z_1 = z$ y $z_2 = z + 2k\pi i$, que tienen la misma imagen por f. Usando que un automorfismo de $\mathbb{C}$ es de la forma $\varphi(z) = az+b$ con a y b complejos, $a \neq 0$, se tiene

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z + 2k\pi i)}{2\pi i} = \in \mathbb{Z}$$

si y sólo si $2ka\pi i \in \mathbb{Z}$. Pero como esto debe valer para todo $k \in \mathbb{Z}$, resulta que φ induce ψ de Ω en sí mismo sii $a \in \mathbb{Z}$. Veamos que el mapa ψ inducido por $\varphi(z) = kz + b$ es una automorfismo de Ω sii $k = \pm 1$. En caso contrario, $|k| > 1$, y por lo tanto $f(2\pi i/k) \neq f(0)$. Como $\varphi(0) = \varphi(2\pi i/k)$, resulta que ψ no es inyectiva. Concluimos lo siguiente

Teorema 7. *Sea* $\Gamma = \{\pm z+b : b \in \mathbb{C}\}$. *Entonces* Γ *es un subgrupo de* $Aut(\mathbb{C})$. *Existe un epimorfismo de grupos* $T : \Gamma \to Aut(\Omega)$ *cuyo núcleo es* $\Gamma_0 = \{z + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$. *Por lo tanto, el grupo de automorfismos de* Ω *está generado por la inversión* $z \to 1/z$ *y los* $z \to \alpha z$ *con* $\alpha \in \mathbb{C}$.

El teorema 5 no se puede aplicar directamente para inducir una métrica en Ω, puesto que no todo automorfismo de $\mathbb{C}$ es una isometría.

Ejercicio 14. *Aplicando el teorema 7, hallar una métrica* ρ_0 *en* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tal que la exponencial sea una isometría conforme. Determinar las geodésicas de* Ω *y probar que todo automorfismo de* Ω *es una isometría.*

6.2. Anillos. Sea $r > 1$ y defina $A_r = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r\}$. Es claro que cualquier anillo de la forma $\{|z| \in (a, b)\}$ con $a < b$ reales positivos es conformemente equivalente a uno de estos, basta considerar la multiplicación por $1/a$. El objetivo es ahora demostrar que dos de los A_r no son conformemente equivalentes, (lo que contrasta con la situación para subconjuntos propios de $\mathbb{C}$, simplemente conexos, que son todos conformemente equivalentes).

Para cada $a \in \mathbb{R}^+$, sea $f_a(z) = z^{-ai}$ donde se elige argumento de z en $(0, \pi)$. Se verifica fácilmente que es un cubrimiento de H^+ en el anillo $A(e^{a\pi})$. Sea $r = e^{a\pi}$. El teorema 6 proporciona una métrica hiperbólica para A_r Veamos que existe una geodésica cerrada y calculemos su longitud. La imagen por f de la geodésica $x = 0$ en H^+ es una geodésica en A_r que denotamos por α. Su ecuación es:

$$\begin{aligned} f(iy) = (iy)^{-ai} = exp(-ai \log(iy)) = exp(-ai(\log(y) + i\pi/2)) = \\ e^{a\pi/2}(\cos(a \log y) - i \sin(a \log y)). \end{aligned}$$

Es la circunferencia de radio $\sqrt{r}$ recorrida infinitas veces. Para calcular su longitud, basta calcular la longitud de un levantado de ella por f en H^+. En efecto, resolviendo $a \log y = 0$ se obtiene solución $y_0 = 1$, y resolviendo $a \log y = 2\pi$ se obtiene $y_1 = e^{2\pi/a}$. Si $\tilde{\gamma}(y) = iy$ para $y \in (y_0, y_1)$, entonces $f(\tilde{\gamma})$ recorre una vez la geodésica cerrada. Si $\rho(x + iy) = 1/y$ denota la métrica conforme en H^+ entonces:

$$\ell_\rho(\tilde{\gamma}) = \int_{y_0}^{y_1} \frac{|\tilde{\gamma}'(y)|}{y} dy = \int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{y} dy = \frac{2\pi}{a}.$$

Veamos que no existe otra geodésica cerrada. Sacando las rectas verticales, toda geodésica en H^+ tiene dos puntos límite en el eje real, que llamamos finales. Para cada una de estas geodésicas γ asignemos un número $p(\gamma) \in \mathbb{R}$: el producto de los finales y si γ es una recta definimos $p(\gamma)$ como su final.

Lema 5. *Si* $p(\gamma) > 0$ *entonces* $f(\gamma)$ *no intersecta la geodésica cerrada* α. *Además* $f(\gamma)$ *empieza y termina en el mismo borde de* A_r. *Si* $p(\gamma) < 0$, *entonces* $f(\gamma)$ *empieza en un borde de* A_r *y termina en el otro. Y si* $p(\gamma) = 0$ *y* γ *no es la geodésica cerrada* α, *entonces* $f(\gamma)$ *tiende a un borde por un lado y converge a* α *por el otro.*

La demostración queda de ejercicio. Se concluye que no hay otra geodésica cerrada.

Ejercicio 15. *Probar que la métrica hiperbólica en* A_r *es*

$$\rho_r(w) = \left(a|w| \sin(\frac{\log |w|}{a}) \right)^{-1},$$

Observar que es invariante por rotaciones y graficarla como función de $|w|$. *Concluir otra prueba de la existencia de una única geodésica cerrada.*

Ejercicio 16. *Hallar* Γ_f *para* $f(z) = e^{-ai}$.

Concluimos esta parte con la clasificación de anillos.

Definición 8. *Un anillo es un subconjunto de* $\mathbb{C}$ *cuyo complemento en* $\bar{\mathbb{C}}$ *tiene exactamente dos componentes conexas.*

Teorema 8. *Todo anillo es conformemente equivalente a uno y sólo uno de los siguientes modelos:*

- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
- A_r, $r > 1$.
- $\mathbb{D} \setminus \{0\}$

Ejercicio 17. *Probarlo.*

Ejercicio 18. *¿Hay suficientes automorfismos? Es decir, para todo par* z, w *en un anillo* A, *¿existe un automorfismo de* A *que lleve* z *en* w*?*