

EXAMEN

25 de julio de 2000

- Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de operadores $T_\lambda \in B(X, Y_\lambda)$, donde cada Y_λ es un espacio normado, y tales que $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda(x)\| < \infty$, $\forall x \in X$. Se define $\|\cdot\|_\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|x\|_\Lambda = \|x\| + \sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda(x)\|$. Probar que $\|\cdot\|_\Lambda$ es una norma sobre X , y que es equivalente a $\|\cdot\|$.
- Sean X e Y espacios de Banach sobre \mathbb{F} , donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.
 - Para $\phi \in X^*$, $y \in Y^*$, sea $T_{\phi, \psi} : X \rightarrow Y^*$ tal que $T_{\phi, \psi}(x) = \phi(x)\psi$. Probar que $T_{\phi, \psi} \in B(X, Y^*)$, y calcular $\|T_{\phi, \psi}\|$.
 - Para $x \in X$, $y \in Y$, sea $\eta_{x, y} : B(X, Y^*) \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\eta_{x, y}(T) = Tx(y)$. Probar que $\eta_{x, y}$ es continua y que $\|\eta_{x, y}\| = \|x\| \|y\|$.
 - Sea $Z = \overline{\text{span}}\{\eta_{x, y} : x \in X, y \in Y\} \subseteq B(X, Y^*)^*$. Probar que $\mu : B(X, Y^*) \rightarrow Z^*$ tal que $\mu(T)|_\eta = \eta(T)$ es un isomorfismo isométrico.
 - Consideremos $B(X, Y^*)$ con la topología w^* dada por (c), y sean $(T_i)_{i \in I}$ una red acotada en $B(X, Y^*)$, $T \in B(X, Y^*)$. Probar que $T_i \xrightarrow{w^*} T \iff T_i(x) \xrightarrow{w^*} T(x)$, $\forall x \in X$.
- Sean $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert H , $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números complejos y $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función inyectiva.
 - Probar que existe $T \in B(H)$ tal que $T(e_k) = a_k e_{\sigma(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Calcular, en función de $\{a_n\}$, $\|T^k\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. (Sugerencia: observar que T^k es de la misma forma que T , para otros valores de a_n y σ).
 - Probar que T es compacto si $\{a_n\}$ tiende a 0.
 - Probar que si σ es biyectiva $T^*(e_k) = \bar{a}_{\sigma^{-1}(k)} e_{\sigma^{-1}(k)}$.
 - Suponiendo que $\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N})$ es finito y que $a_n = 1$ para todo n , probar que T es un operador de Fredholm, y hallar su índice.
 - Sea $T \in B(H)$ tal que $T(e_n) = \frac{1}{n+1} e_n$. Probar que T es compacto, autoadjunto, de rango infinito y que es nilpotente en sentido generalizado, es decir T^n tiende a 0, en la norma de $B(H)$.
 - Sea $T \in B(H)$ un operador compacto y normal tal que $T^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Probar que $T = 0$.

SOLUCIONES

1. Puede suponerse que Y_λ es un espacio de Banach, $\forall \lambda$. Sean $Y = \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$, y $\tilde{T}_\lambda : X \rightarrow Y$ tal que $\tilde{T}_\lambda(x)|_{\lambda'} = \begin{cases} T_\lambda(x) & \text{si } \lambda = \lambda' \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \lambda' \end{cases}, \forall \lambda \in \Lambda$. Entonces $\|T_\lambda\| = \|\tilde{T}_\lambda\|, \forall \lambda \in \Lambda$.
Por la hipótesis y el teorema de acotación uniforme existe M tal que $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\tilde{T}_\lambda\| \leq M$. Luego:

$$\|x\| \leq \|x\|_\Lambda \leq (1 + M)\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

2. a) $\|T_{\phi,\psi}\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_{\phi,\psi}(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|\phi(x)\psi\| = \sup_{\|x\|=1} |\phi(x)| \|\psi\| = \|\phi\| \|\psi\|$.
b) $|\eta_{x,y}(Y)| = |Tx(y)| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$, de modo que $\|\eta_{x,y}\| \leq \|x\| \|y\|$. Por otro lado, por el teorema de Hahn–Banach existen $\phi \in X^*$ y $\psi \in Y^*$ tales que $\|\phi\| = 1 = \|\psi\|$, y $\phi(x) = \|x\|, \psi(y) = \|y\|$. Luego $\|T_{\phi,\psi}\| = 1$ y $\eta_{x,y}(T_{\phi,\psi}) = \|x\| \|y\|$, de donde concluimos que $\|\eta_{x,y}\| = \|x\| \|y\|$.
c) Es claro que $\|\mu(T)\| \leq \|T\|$, de manera que $\mu(T) \in Z^*$. Que μ es lineal es obvio. Veamos que μ es una isometría:

$$\|T\| \geq \|\mu(T)\| \geq \sup_{\|x\|=1=\|y\|} |\eta_{x,y}(T)| = \sup_{\|x\|=1=\|y\|} |Tx(y)| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|T\|.$$

Para ver que μ es sobreyectiva, observamos que $f \in Z^*$ queda determinada por sus valores en el conjunto $Z' := \{\eta_{x,y} : x \in X, y \in Y\}$. Si existe $T \in B(X, Y^*)$ tal que $\mu(T) = f$, debe ser $Tx(y) = f(\eta_{x,y}), \forall x \in X, y \in Y$. Sea entonces $T : X \rightarrow Y^*$ tal que $Tx|_y = f(\eta_{x,y}), \forall x \in X, y \in Y$. Entonces Tx es lineal y $\|tx\| \leq \|f\| \|x\|, \forall x \in X$, de donde vemos al mismo tiempo que efectivamente se tiene que $Tx \in Y^*$, y que $T \in B(X, Y^*)$, puesto que $\|T\| \leq \|f\|$. Como $\mu(T)|_{Z'} = f|_{Z'}$, concluimos que $\mu(T) = f$.

- d) Supongamos primero que $T_i \xrightarrow{w^*} T$, es decir, $\mu(T_i)|_\eta \rightarrow \mu(T)|_\eta, \forall \eta \in Z$. En particular que $\mu(T_i)|_{\eta_{x,y}} \rightarrow \mu(T)|_{\eta_{x,y}}, \forall x \in X, y \in Y$. Esto implica que $T_i x(y) \rightarrow Tx(y), \forall x \in X, y \in Y$, es decir, $T_i x \xrightarrow{w^*} Tx, \forall x \in X$. Inversamente, si $T_i x \xrightarrow{w^*} Tx, \forall x \in X$, entonces $\mu(T_i)|_{\eta_{x,y}} \rightarrow \mu(T)|_{\eta_{x,y}}, \forall x \in X, y \in Y$, y por lo tanto $\mu(T_i)|_\eta \rightarrow \mu(T)|_\eta, \forall \eta \in \text{span } Z'$, donde Z' es el conjunto de la parte anterior. Como por hipótesis existe $M > 0$ tal que $\|T_i\|, \|T\| \leq M, \forall i \in I$, se deduce que $\mu(T_i)|_\eta \rightarrow \mu(T)|_\eta, \forall \eta \in Z$. En efecto, dados $\epsilon > 0$ y $\eta \in Z$, existe $\eta' \in \text{span } Z'$ tal que $\|\eta - \eta'\| < \epsilon/3M$. Sea i_0 tal que $\forall i \geq i_0$ se tiene que $\|\mu(T_i)|_{\eta'} - \mu(T)|_{\eta'}\| < \epsilon/3$. Entonces, si $i \geq i_0$:

$$\|\mu(T_i)|_\eta - \mu(T)|_\eta\| = \|\mu(T_i)|_{\eta-\eta'} + \mu(T)|_{\eta'-\eta} + \mu(T_i)|_{\eta'} - \mu(T)|_{\eta'}\| \leq \epsilon.$$