Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2003

Examen

24 de mayo de 2004

1. Sean X un espacio de Banach y $T \in B(X)$.

   a) Probar que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

      1) T es invertible.
      2) $\overline{\mathrm{Im} T} = X$ y $\nexists (x_n) \subseteq X$ tal que $\|x_n\| = 1$ $\forall n$ y $Tx_n \to 0$.
      3) $\overline{\mathrm{Im} T} = X$ y $\exists \epsilon > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \epsilon \|x\|$, $\forall x \in X$.

   b) Supongamos que $X = \ell^2$ $(= \ell^2(\mathbb{N}))$ y que $T \in B(\ell^2)$ es tal que $Te_n = a_n e_{\sigma(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $a_n \in \mathbb{C}\, \forall n$ y $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección.

      1) Probar que (a_n) está acotada, y calcular $\|T\|$.
      2) Probar que $\overline{\mathrm{Im} T} = \ell^2 \iff a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
      3) Dar una condición necesaria y suficiente acerca de la sucesión (a_n) para que T sea un operador invertible.

2. Supóngase que μ es una medida σ–finita sobre un conjunto S, y considérese los espacios $L^1(\mu)$, su dual $L^\infty(\mu)$, y su bidual $L^\infty(\mu)'$. Sea $J : L^1(\mu) \to L^\infty(\mu)'$ la inclusión natural, es decir: $J(\alpha) = \hat{\alpha}$, definida como $\hat{\alpha}(f) = \int_S \alpha(s) f(s) d\mu(s)$, $\forall f \in L^\infty(\mu)$. Por último, considérese los conjuntos $P := \{\alpha \in L^1(\mu) : \alpha \geq 0 \text{ y } \int_S \alpha d\mu = 1\}$ y $M := \{\varphi \in L^\infty(\mu)' : \varphi(1) = 1 \text{ y } \varphi(f) \geq 0\ \forall f \in L^\infty(\mu)^+\}$.

   a) Probar que $J(P) \subseteq M$.

   b) Sea $f \in L^\infty(\mu)$ a valores reales, y sean a y b el ínfimo esencial de f y el supremo esencial de f respectivamente. Mostrar que

      1) $a \leq \varphi(f) \leq b$, $\forall \varphi \in M$.
      2) Para cada $\delta > 0$ existe $\alpha_\delta \in P$ tal que $\hat{\alpha}_\delta(f) \geq b - \delta$ (Sugerencia: existe $E_\delta \subseteq S$ de medida positiva y finita tal que $f(s) \geq b - \delta$, $\forall s \in E_\delta$; considerar $\alpha = \frac{1}{\mu(E_\delta)} \chi_{E_\delta}$).

   c) Probar que M es convexo y w^*-compacto.

   d) Demostrar que $\overline{J(P)}^{w^*} = M$.

   e) Deducir que si $\varphi \in M$, entonces $\|\varphi\| = 1$.

3. Supóngase que $T : H \to X$ es un operador acotado y sobreyectivo del espacio de Hilbert H sobre el espacio de Banach X. Probar que existe un producto interno sobre X cuya norma inducida es equivalente a la que ya tiene X.