

Examen

1 de marzo de 2006

1. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable. Se dice que $T \in B(\mathcal{H})$ es *nuclear* si existen sucesiones $(y_n)_{n \geq 1}$ y $(z_n)_{n \geq 1}$ contenidas en la esfera unidad de \mathcal{H} , y una sucesión $(\lambda_n)_{n \geq 1} \in \ell^1$ tales que:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, y_n \rangle z_n, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Se define entonces: $\|T\|_{\nu} := \inf\{\sum_{n \geq 1} |\lambda_n| : (\lambda_n)_{n \geq 1} \text{ es como arriba}\}$.

- a) Probar que T es nuclear si y sólo si T^* lo es, y que en tal caso $\|T\| \leq \|T\|_{\nu} = \|T^*\|_{\nu}$.
- b) Mostrar que si T es nuclear, $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, y_n \rangle z_n$, $\forall x \in \mathcal{H}$, y si $(e_k)_{k \geq 1}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} , entonces $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_k \rangle| \leq \|T\|_{\nu}$ (Sugerencia: recordar que las sucesiones $(\langle e_k, y_n \rangle)_{k \geq 1}$ y $(\langle z_n, e_k \rangle)_{k \geq 1}$ están en ℓ^2 , y usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz).
- c) Mostrar que todo operador de rango finito es nuclear.
- d) Probar que todo operador nuclear es compacto.
- e) Sea $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ tal que $Tx(n) = \frac{1}{n+1}x(n)$. Mostrar que T es compacto pero no es nuclear (Sugerencia: usar la parte b)).
- f) Sea $N \in B(\mathcal{H})$ un operador normal. Demostrar que N es nuclear si y sólo si existe una base ortonormal $(e_n)_{n \geq 1}$ formada por vectores propios de N , tal que si $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ es la sucesión de los correspondientes valores propios, entonces $\sum_{n \geq 1} |\alpha_n| < \infty$. Mostrar que en ese caso se tiene $\|N\|_{\nu} = \sum_{n \geq 1} |\alpha_n|$.
2. Sea $a = (a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales. Se considera el conjunto $K_a := \{x \in \ell^2 : |x_n| \leq |a_n|\}$.
- a) Probar que K_a es convexo y averiguar si tiene puntos extremales.
- b) Probar que K_a es compacto sii $a \in \ell^2$.
- c) Suponiendo que $a \in \ell^2$, averiguar si la cápsula convexa de $\text{Ext}(K_a)$ es cerrada.
3. a) Sea X un espacio de Banach. Probar que X es reflexivo si y sólo si toda red w^* -convergente en X^* es w -convergente.
- b) Hallar una sucesión en ℓ^1 que sea w^* -convergente pero no w -convergente.

Duración: 4 horas