

Examen

13 de febrero de 2006

1. Se dice que un espacio de Banach X es *uniformemente convexo* si para todo par de sucesiones (x_n) e (y_n) tales que $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\forall n$, y $\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\| \rightarrow 1$, se tiene que $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

a) Averiguar si ℓ^1 y ℓ^2 son uniformemente convexos.

En adelante supondremos que X es uniformemente convexo.

b) Demostrar que si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, entonces $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

c) Supóngase que N es un subespacio de X^* tal que $\{\varphi \in N : \|\varphi\| \leq 1\}$ es w^* -denso en la bola unitaria de X^* .

1) Probar que N separa puntos de X .

2) Sea τ la topología inducida por N en X . Demostrar que si $x_n \xrightarrow{\tau} x$ y $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, entonces $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

2. Sean X un espacio de Banach, y $T \in B(X)$ un operador de rango denso.

a) Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$, y sea $B_0 = \bar{B}(x, \epsilon)$. Supóngase que $(U_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de abiertos densos en X .

1) Probar que $\forall n \geq 1$ existen $y_n \in U_n$ y $r_n \in (0, \epsilon/(2\|T\|^n))$ tales que, si $B_n := B(y_n, r_n) \forall n \geq 1$, entonces $\bar{B}_n \subseteq U_n$, y $T(\bar{B}_n) \subseteq B_{n-1}$.

2) Fijado $k \geq 0$, considérese la sucesión $(T^j(y_{k+j}))_{j \geq 0}$. Mostrar que $(T^j(y_{k+j}))_{j \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy contenida en \bar{B}_k .

3) Sea x_k el límite de la sucesión $(T^j(y_{k+j}))_{j \geq 0}$, $\forall k \geq 1$. Probar que $T(x_{k+1}) = x_k$, $\forall k \geq 1$, y deducir que $\bigcap_{n \geq 1} T^n(U_n)$ es denso en X .

b) Supóngase que $T : \ell^5 \rightarrow \ell^5$ está dado por $(Tx)(n) := x(n) \cos n$, $\forall x \in \ell^2$. Probar que T es acotado de rango denso, y deducir que el conjunto $D := \{x \in \ell^5 : (T^n)^{-1}(x) \neq \emptyset, \forall n \geq 0\}$ es denso en ℓ^5 .

3. Sean \mathcal{H} un espacio de Hilbert sobre \mathbb{C} y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador acotado. Decimos que T es hipercíclico si existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $\overline{\{T^n(x) \mid n = 1, 2, \dots\}} = \mathcal{H}$; en ese caso decimos que x es un vector hipercíclico para T . Supongamos que T es hipercíclico y que x es un vector hipercíclico para T .

a) Probar que para todo $z \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ el conjunto $\{\langle z, T^n(x) \rangle \mid n = 1, 2, \dots\}$ es denso en \mathbb{C} .

b) Probar que el espectro puntual de T^* es vacío.

c) Sea P un polinomio cualquiera no nulo. Probar que $P(T)$ tiene rango denso.

d) Sea $M = \{P(T)(x) \mid P \text{ polinomio}\}$. Probar que M es un subespacio denso de \mathcal{H} , invariante por T tal que todo $y \in M \setminus \{0\}$ es un vector hipercíclico para T .