Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Examen

2 de febrero de 2006

1. Sea X un espacio normado. Se dice que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ es *débilmente de Cauchy* si para todo $f \in X^*$ la sucesión compleja $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

   a) Probar que si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ es débilmente de Cauchy, entonces el conjunto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un subconjunto acotado de X.

   b) Mostrar que si X es reflexivo y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ es débilmente de Cauchy, entonces (x_n) converge débilmente a cierto $x \in X$.

   c) Dar un ejemplo de una sucesión débilmente de Cauchy que no sea débilmente convergente.

2. Sea $\mathcal{H} := \ell^2(\mathbb{Z})$. Para cada $m, n \in \mathbb{Z}$ y para cada $a \in c_0(\mathbb{Z})$ se consideran los operadores M_a, U_n y $e_{m,n} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, dados por: $M_a x(k) = a(k)x(k)$, $U_n x(k) = x(k-n)$, y $e_{m,n}x = \langle x, e_n\rangle e_m$, $\forall x \in \mathcal{H}$, $k \in \mathbb{Z}$.

   a) Probar que M_a y U_n son operadores acotados. Calcular M_a^*, U_n^*, $\|M_a\|$, $\|e_{m,n}\|$, y mostrar que $e_{m,n} = M_{a_m}U_{m-n}$, donde $a_m(k) = \delta_{m,k}$.

   b) Probar que cada M_a es compacto, y que cada U_n es unitario.

   c) Dados $y, z \in \mathcal{H}$, se considera la sucesión de operadores $(T_k)_{k\geq 1} \subseteq B(\mathcal{H})$, donde $T_k = \sum_{|m|,|n|\leq k} \langle e_n, y\rangle\langle z, e_m\rangle e_{m,n}$. Probar que (T_k) converge en $B(\mathcal{H})$ a un operador de rango uno, y hallar este operador.

   d) Sea $A := \overline{\operatorname{span}}\{M_a U_n : a \in c_0(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{Z}\}$. Demostrar que A coincide con el ideal de los operadores compactos en $\mathcal{H}$.

3. Sea $X = (C(\mathbb{D}), \|\,\|_\infty)$, donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. En lo que sigue Y será un subespacio de Banach de X que contiene a la función 1. Se definen los siguientes tres conjuntos:

$$Y^+ := \{\varphi \in Y^* : \varphi(1) = \|\varphi\|\} \qquad \mathrm{Q}(Y) := Y^+ \bigcap \bar{B}(0,1).$$

$$\mathrm{PS}(Y) := \{\varphi \in Y^+ : \varphi(1) = 1 \text{ y si } 0 \leq \psi \leq \varphi,\ \text{existe } \lambda \in [0,1] \text{ tal que } \psi = \lambda\varphi\}$$

   a) Probar que Y^+ define un orden parcial en Y^*, dado por $\varphi \geq \psi \iff \varphi - \psi \in Y^+$.

   b) Probar que $\mathrm{Q}(Y)$ es convexo y w^*-compacto.

   c) Demostrar que $\mathrm{Q}(Y)$ es la envolvente convexa cerrada de $\mathrm{PS}(Y) \bigcup \{0\}$.

   d) Sea $R : X^* \to Y^*$ tal que $R(\varphi) = \varphi_{|Y}$. Probar que $R(\mathrm{Q}(X)) = \mathrm{Q}(Y)$.

   e) Probar que si $\varphi \in \operatorname{ext}(\mathrm{Q}(Y))$, entonces existe $z \in \mathbb{D}$ tal que $\varphi(f) = f(z)$, $\forall f \in Y$ (Sugerencia: probar que $R^{-1}(\varphi) \bigcap \mathrm{Q}(X)$ es un subconjunto extremal de $\mathrm{Q}(X)$).