Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional
Primer semestre 2004

Examen 12/04

Salvo indicación contraria, sólo se pueden usar sin demostración los resultados vistos en el curso teórico. Si se usa un resultado de un ejercicio del práctico debe incluirse la resolución del ejercicio.

1. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{B}$ la bola unitaria cerrada en $\mathbf{B}(\mathcal{H})$.

   a) Sean $T \in \mathcal{B}$ y $h \in H$. Probar que $Th = h$ si y sólo si $T^*h = h$.

   b) Sean $C \subset \mathcal{B}$ un conjunto no vacío tal que $ST \in C$ si $S, T \in C$ y $\mathcal{H}_C = \{h \in \mathcal{H} : Th = h\ \forall T \in C\}$. Probar que $\mathcal{H}_C$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$, que $\mathcal{H}_C^{\perp}$ es la clausura del subespacio generado por $\{h - Th : h \in \mathcal{H},\ T \in C\}$ y que H_C y $H_C^{\perp}$ son invariantes bajo T para todo $T \in C$.

   c) Dado $T \in \mathcal{B}$, sea $C = \{T^k : k = 1, 2, \dots\}$. Probar que $\mathcal{H}_C^{\perp} = \overline{\mathrm{Im(I-T)}}$. Sea $W_n = \frac{1}{n}\sum_1^n T^k$, para todo $n \in \mathbf{N}$. Probar que $W_n h \to Ph$ para todo $h \in \mathcal{H}$, donde P es la proyección ortogonal sobre H_C.

2. Sean X un espacio de Banach y $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

   a) Sean D un subconjunto denso de S e $y \in X$.

      1) Probar que dado $\epsilon > 0$ existe $d \in D$ tal que $\|y - \|y\|d\| < \epsilon$.

      2) Probar que existen $a \in l^1$ y una sucesión $\{d_n\}_{n\geq 1}$ en D tales que $y = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) d_n$.

   b) Demostrar que X es separable si y sólo si existe un subespacio cerrado Y de l^1 tal que $X \cong l^1/Y$ (como espacios de Banach).

3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo.

   a) Sean $T_1, T_2 \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ operadores autoadjuntos tales que $T_1T_2 = 0$. Probar que para todo $\lambda \neq 0$ se tiene que $\ker(T_i - \lambda I) \subset \ker T_j$, si $i \neq j$.

   b) Sean T_1 y T_2 operadores compactos y positivos tales que $T_1T_2 = 0$, y sea $T = T_1 - T_2$.

      1) Probar que $\|T_i\| \leq \|T\|$ para $i = 1, 2$.

      2) Probar que $\|T\| = \text{Máx}\ \{\|T_1\|, \|T_2\|\}$. (Sugerencia: si $x \in \mathcal{H}$ es un vector propio de T, $\|x\| = 1$ y $\|Tx\| = \|T\|$, probar que x es vector propio de T_1 o de T_2.)

   c) Sea $T \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ un operador compacto y autoadjunto. Probar que existen operadores compactos y positivos T_1 y T_2 tales que $T = T_1 - T_2$ y $T_1T_2 = 0$.