Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo III
Primer semestre de 2008

Práctico 6

1. Sea V un espacio vectorial orientado y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base positiva de V. Probar que:

   a) Reemplazar un vector v_i por un múltiplo $c\,v_i$ da lugar a una base positiva si $c > 0$ y a una negativa si $c < 0$.

   b) Intercambiar dos elementos de B da lugar a una base negativa.

   c) Restarle a un v_i una combinación lineal de los restantes da lugar a una base positiva.

2. Sea $T : V \to W$ un isomorfismo lineal entre dos espacios vectoriales orientados. Probar que si existe B base positiva de V tal que $T(B)$ es una base positiva de W, entonces $T(C)$ es una base positiva de W para toda base positiva C de V.

3. Escribir explícitamente la orientación de S^2 como borde de B^3 escribiendo una base positiva del plano tangente para cada punto de S^2.

4. Probar que el toro es una superficie orientable.

5. Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo entre variedades orientadas. Decimos que f *preserva* o *invierte* la orientación si $d_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ preserva o invierte la orientación para todo p en M, respectivamente.

   i) Probar que el mapa antípoda $a : S^2 \to S^2$ definido por $a(x) = -x$, $\forall x \in S^2$ invierte la orientación. Ahora considere $a : S^n \to S^n$ definido de la misma forma: $a(x) = -x$. Probar que a preserva la orientación si n es impar y que la invierte si n es par.

   ii) Encontrar un difeomorfismo del toro que invierta orientación.

6. *a*) Sea $f : M \to N$ un mapa diferenciable entre variedades tal que f un difeomorfismo local en todo punto $p \in M$. Probar que si N es orientable también lo es M.

   b) Aplicar la parte anterior para probar que si N variedad orientable y M es un subconjunto abierto de N entonces M es orientable. Concluir que si N tiene un subconjunto abierto difeomorfo a la banda de Möbius entonces N no es orientable.

7. Sean M y N variedades orientadas. Sea f un difeomorfismo de M en N. Probar que f induce una orientación en N a partir de la orientación de M. Dar ejemplos en los que f preserva la orientación y que f invierte la orientación.

8. Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo entre variedades con borde. Probar que $f(\partial M) = \partial N$ y $f|_{\partial M} : \partial M \to \partial N$ es un difeomorfismo.

9. Sea $T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ una isometría lineal, esto es, T es lineal y $\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle$ donde $\langle , \rangle$ es el producto interno usual de $\mathbb{R}^{n+1}$. Probar que $T|S^n : S^n \to S^n$ es un difeomorfismo.

   a) Probar que $\det T = 1$ ó -1.

b) Probar que $T|S^n$ preserva orientación sii $\det T = 1$ y que la invierte sii $\det T = -1$.

c) Probar que si n es par y T preserva orientación entonces $T|S^n$ tiene un punto fijo y que lo mismo puede decirse si n es impar y $T|S^n$ invierte orientación.

10. *a*) Sea $F : U \to V$ un difeomorfismo entre abiertos conexos de $\mathbb{R}^n$. Probar que el mapa $p \mapsto \det(\mathbb{J}F(p))$ es continuo, y en consecuencia, es siempre positivo o siempre negativo.

    b) Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo entre variedades orientadas. Consideramos la función $g : M \to \{-1, 1\}$ definida por $g(p) = 1$ si d_pf preserva orientación y $g(p) = -1$ si d_pf invierte orientación.

    1) Sean X una parametrizacin de un entorno de p compatible con la orientacin de M e Y una parametrizacin de un entorno de $f(p)$ compatible con la orientacin de N, de forma tal que la composición $F = Y^{-1} \circ f \circ X : U \to V$ esté bien definida. Probar que $\forall x \in U$ vale que $g(x) = 1$ si y solo si $\det(\mathbb{J}F(x)) > 0$.
    2) Probar que g verifica que $\forall p \in M$ existe W entorno abierto de p en M tal que $g|_W$ es constante.
    3) Concluir que si M es conexa y existe $p \in M$ tal que $d_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ preserva orientación entonces f preserva orientación.

11. *a*) Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita tal que admite la existencia de una forma bilineal alternada no degenerada $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$. Probar que V tiene dimensión par.

    b) Probar que si M es una variedad que admite la existencia de una 2-forma no degenerada ω (*i.e.* la forma bilineal ω_p es no degenerada $\forall p \in M$), entonces M tiene dimensión par.

12. Sea V un espacio vectorial real orientado con producto interno de dimensión finita n. Probar que existe una única forma multilineal alternada ν en V tal que $\nu(v_1, \ldots, v_n) = 1$ para toda base ortonormal positiva $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Observar que si $V = \mathbb{R}^n$ con el producto interno usual y la orientación estándar, entonces $\nu = \det$.

13. Si M es una variedad orientada de dimensión n, se define una n-forma dV en M llamada el *elemento de volumen* mediante lo siguiente: si $p \in M$, entonces dV_p es la única n-forma multilineal alternada en T_pM que verifica $dV_p(v_1, \ldots, v_n) = 1$ para toda base ordenada ortonormal positiva $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de T_pM. Probar que dV coincide con dA si $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular y con ds si $M \subset \mathbb{R}^3$ es una curva regular.

14. Sean U y V abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \to V$ una funcin diferenciable. Sea ω una k-forma diferenciable en V.

    a) Probar que $f^*\omega$ es una k-forma *diferenciable* en U.

    b) Probar que $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

15. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, un mapa diferenciable. Probar que

$$f^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \det(\mathbb{J}f)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

16. Sea $U = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi\}$. Se define $f : U \to \mathbb{R}^3$ mediante

$$f(r, \theta, \varphi) = (r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta).$$

Observar que f es un difeomorfismo sobre $f(U)$. Sea ω la 2-forma en $f(U)$ dada por

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(z\, dx \wedge dy - y\, dx \wedge dz + x\, dy \wedge dz \right).$$

a) Probar que $f^*\omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta \wedge d\phi$.

b) Demostrar que $d\omega = 0$ usando (a) y las propiedades del pull-back.

17. Probar los teoremas clsicos de Green, Stokes y Gauss a partir del teorema general de Stokes y las identificaciones vistas en el prctico 2.

18. Sea C una curva regular orientada y ds el elemento de arco en C. Probar que si $\alpha : I \to C$ es una parametrizacin compatible con la orientacin de C, entonces $\alpha^*(ds) = \|\alpha'\|\, dt$.

19. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular orientada y dA el elemento de rea en S. Probar que si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es una parametrizacin compatible con la orientacin de S, entonces

$$X^*(dA) = \|X_u \times X_v\|\, du \wedge dv.$$

20. *a*) Se considera la esfera S^2 y $\omega = \{\omega_p\}_{p\in S^2}$, siendo $\omega_p : T_pS^2 \times T_pS^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\omega_p(u,v) = \langle p, u \times v\rangle$, donde $\times$ denota el producto vectorial de $\mathbb{R}^3$. Probar que ω es una 2-forma cerrada no degenerada en S^2.

    b) Se define $X : (-1,1) \times (0,2\pi) \to S^2$ mediante

    $$X(h,\theta) = (\sqrt{1-h^2}\cos\theta, \sqrt{1-h^2}\operatorname{sen}\theta, h).$$

    1) Probar que X es una parametrizacin de un abierto de S^2.
    2) Probar que $X^*(\omega) = d\theta \wedge dh$.

21. *a*) Sea $f : M \to N$ un mapa diferenciable entre variedades. Probar que el pull-back $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ lleva formas exactas en exactas y formas cerradas en cerradas, para todo $k \geq 0$.

    b) Sea $f : M \to N$ un difeomorfsmo entre variedades. Probar que si $\omega \in \Omega^k(N)$ $(k \geq 0)$, entonces ω es exacta si y solo si $f^*\omega$ es exacta.

    c) Deducir que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no son difeomorfos.

22. Si M es una variedad, sean

$$\begin{aligned} Z^k(M) &= \{\omega \in \Omega^k(M) : \ d\omega = 0\}, \\ B^k(M) &= \{\omega \in \Omega^k(M) : \ \exists\, \eta \in \Omega^{k-1}(M), \ \omega = d\eta\}, \\ H^k(M) &= Z^k(M)/B^k(M). \end{aligned}$$

Para cada $\omega \in Z^k(M)$, escribimos $[\omega] = \omega + B^k(M) \in H^k(M)$.

a) Sea $f : M \to N$ un mapa diferenciable entre variedades. Probar que tiene sentido definir $f^{\#} : H^k(N) \to H^k(M)$ mediante

$$f^{\#}([\omega]) = [f^*(\omega)], \quad \forall\, \omega \in Z^k(N).$$

Sugerencia: recordar el ejercicio anterior.

b) Sean $f : M \to N$ y $g : N \to P$ mapas diferenciables entre variedades. Probar que $(g \circ f)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$.

c) Probar que si $f : M \to N$ es un difeomorfismo de variedades, entonces el mapa lineal $f^{\#} : H^k(N) \to H^k(M)$ es un isomorfismo, para todo $k \geq 0$.

23. Análogamente al prctico 3, si $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un mapa diferenciable, definimos

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$$

y decimos que h es *armónica* si $\Delta h = 0$. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una variedad de dimensión 3 compacta con borde $S = \partial M$ y sean $f, g : M \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables.

a) Probar la *identidad de Green*:

$$\int_M f\,\Delta g\,dV = \int_S \langle f\,\nabla g, N\rangle\,dA - \int_M \langle \nabla f, \nabla g\rangle\,dV$$

b) Probar que si f es armónica y $f|_S = 0$ entonces $f = 0$.

24. *a*) Sean M y N variedades, M sin borde y N con borde. Probar que $M \times N$ es una variedad con borde cuyo borde es $M \times \partial N$.

b) Supongamos que $N = [0, 1]$. Consideramos en $M \times \{0\}$ y en $M \times \{1\}$ las orientaciones inducidas como borde de $M \times N$, probar que el difeomorfismo $(x, 0) \mapsto (x, 1)$ invierte la orientación.

25. Decimos que dos curvas cerradas $\alpha, \gamma : S^1 \to M$ son *homotópicas* si existe un mapa $F : S^1 \times [0, 1] \to M$ diferenciable tal que $F(x, 0) = \alpha(x)\ \forall x \in S^1$ y $F(x, 1) = \gamma(x)\ \forall x \in S^1$. F representa una deformación diferenciable entre las curvas α y γ <u>dentro</u> de M.

a) Sea ω una 1-forma cerrada en M. Probar que si $\alpha, \gamma : S^1 \to M$ son homotópicas entonces

$$\int_\alpha \omega = \int_\gamma \omega$$

Sugerencia: Usar el ejercicio anterior y el teorema general de Stokes.

b) Decimos que una variedad es *simplemente conexa* si es conexa y toda curva cerrada es homotópica a la curva constante $c_p : S^1 \to M$ $c_p(x) = p \in M\ \forall x$. Probar que si M es simplemente conexa entonces la integral de una 1-forma cerrada sobre cualquier curva cerrada es 0.

c) Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ simplemente conexo, probar que una 1-forma es exacta si y solo si es cerrada (consecuentemente $H^1(U) = \{0\}$).

d) Sea V un abierto con forma de estrella respecto a p_0. Verificar que dada una curva cerrada $\gamma : S^1 \to V$ la función $F : S^1 \times [0, 1] \to V$ dada por $F(x, t) = tp_0 + (1 - t)\gamma(x)$ es una homotopía entre la curva γ y la curva constante p_0. Dar ejemplos de conjuntos simplemente conexos que no tengan forma de estrella.