

Práctico 3

1. Calcular el trabajo realizado por la fuerza  $F(x, y) = (2xy, -x^2)$  a lo largo de los siguientes caminos que unen  $O = (0, 0)$  y  $A = (2, 1)$ : a) el segmento  $OA$ . b) parábola de eje  $Oy$ . c) parábola de eje  $Ox$ . d) poligonal  $OBA$  donde  $B = (2, 0)$ .
2. Calcular  $\int_C \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$  donde  $C$  es el arco de parábola de ecuación  $y = x^2$  que va desde  $(1, 1)$  hasta  $(2, 4)$ .
3. Calcular la circulación del campo  $F(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$  a lo largo de la elipse de ecuación  $4x^2 + y^2 = 16$  recorrida en sentido antihorario.
4. Sea  $\omega = \frac{-2xy}{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2} dx + \frac{x^2-y^2-1}{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2} dy$  definida en  $U = \mathbb{R}^2 - \{(1, 0), (-1, 0)\}$ .
  - a) Probar que  $\omega$  es cerrada
  - b) Probar que  $\omega$  no es exacta
5. Mostrar que el campo  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  es conservativo.
6. Mostrar que el campo gravitatorio  $F : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  que un objeto de masa  $M$  ejerce sobre un cuerpo de masa  $m$  en el punto  $(x, y, z)$  y dado por  $F(x, y, z) = -\frac{mMG}{\|r\|^3}r$  donde  $r = (x, y, z)$  es conservativo.
7. Sea  $r : [a, b] \rightarrow U$  la trayectoria de un objeto de masa  $m$  bajo la acción de una fuerza total  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$ .
  - a) Demostrar que el trabajo realizado por la fuerza  $F$  a lo largo de la trayectoria  $r$  es  $\frac{1}{2}m\|r'(b)\|^2 - \frac{1}{2}m\|r'(a)\|^2$ , es decir, es la diferencia de la energía cinética.
  - b) Supongamos que la fuerza  $F$  es conservativa y sea  $f$  un potencial, i.e.,  $\nabla f = F$  y denotamos por  $P = -f$ . Demostrar que la *energía*  $E(r(t)) = \frac{1}{2}m\|r'(t)\|^2 + P(r(t))$  es constante, es decir,  $E(r(a)) = E(r(b))$ .
8. Sea  $\omega = \frac{2xy}{(1-x^2)^2+y^2} dx + \frac{1-x^2}{(1-x^2)^2+y^2} dy$ 
  - a) Probar que  $\omega$  es cerrada en  $\mathbb{R}^2 - \{(1, 0), (-1, 0)\}$ .
  - b) Probar que  $\omega$  es exacta en  $\mathbb{R}^2 - U$  donde  $U = \{(x, y) : |x| \geq 1, y = 0\}$ .
  - c) Calcular  $\int_C \omega$  donde  $C$  es la curva  $(1 + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
9. Sean  $\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$  dada por  $\omega_0 = xdx + ydy + zdz$ ,  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable,  $U = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  y  $r : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
  - a) Probar que  $d(f \circ r) = \frac{f' \circ r}{r} \omega_0$ .
  - b) Sea  $\omega = (f \circ r) \omega_0 \in \Omega^1(U)$ . Hallar  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable tal que  $dg = \omega$ .

- c) Calcular  $\int_C$  donde  $C$  es la circunferencia unitaria en el plano  $xy$  orientada en sentido antihorario.
10. Sea  $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .
- a) Sea  $\omega$  una 1-forma cerrada en  $U$ . Sea  $U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) : x \geq 0\}$  y  $U_2 = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) : x \leq 0\}$ . Sean  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$  tales que  $df_i = \omega$  y supongamos que  $\int_C \omega = 0$  donde  $C = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ . Probar que existe una constante  $c$  tal que  $f = g + c$  en  $U_1 \cap U_2$ .
- b) Concluir que si  $\omega$  es una 1-forma cerrada en  $U$  y  $\int_C \omega = 0$  donde  $C$  es como antes, entonces  $\omega$  es exacta.
- c) Sea  $\omega_0 = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$  y sea  $\omega$  una 1-forma en  $U$  cerrada cualquiera. Probar que existe una constante  $K$  tal que  $\omega = K\omega_0$ .
- d) Concluir que  $\dim H^1(U) = 1$ .
11. Sea  $\omega$  una 1-forma definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  ( $k = 1, 2$ ) y sea  $f : V \rightarrow U$  una función diferenciable donde  $V$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Se define  $f^*(\omega)$  una  $k$ -forma en  $V$  definida como  $f^*(\omega)(q)(v) = \omega(f(q))(df_q v)$ .
- a) Probar que si  $f = (f_1, f_2)$  y  $\omega = adx + bdy$  entonces  $f^*(\omega) = a \circ f df_1 + b \circ f df_2$ .
- b) Probar que si  $\omega$  es cerrada entonces  $f^*(\omega)$  también lo es.
- c) Sea  $C$  una curva en  $V$ . Mostrar que  $\int_C f^*(\omega) = \int_{f \circ C} \omega$ .
12. Sea  $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$  definida en  $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Sea  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función diferenciable y consideremos  $f^*(\omega)$  que está definida en  $V$  salvo donde  $f = (0, 0)$ . Sea  $D$  un disco contenido en  $V$  tal que no hay ceros (o singularidades) de  $f$  en  $C = \partial D$ . Probar si  $f$  no tiene ceros en  $D$  entonces  $n(F, D) := \int_C f^*(\omega) = \int_{f \circ C} \omega = 0$ .
13. a) Sea  $\omega$  como en el ejercicio anterior. Calcular  $\int_C \omega$  donde  $C$  es la curva  $(\cos 2t - \sin 2t, \cos 2t + \sin 2t)$  donde  $t \in [0, 2\pi]$ .
- b) Probar que la ecuación
- $$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + y^2 = 2 \\ 4x^2 + 2xy + 2y^2 = 3 \end{cases}$$
- tiene al menos una solución en el disco unitario.
14. Sea  $U$  abierto en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $*$  :  $\Omega^1(U) \rightarrow \Omega^1(U)$  dada por  $*(adx + bdy) = -ady + bdx$ .
- a) Calcular explícitamente  $d*\omega$  para una 1-forma  $\omega$ .
- b) Para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definimos el Laplaciano de  $f$  como

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Probar que  $(\Delta f)dx \wedge dy = d*df$ .

15. Decimos que una función diferenciable es *armónica* si  $\Delta u = 0$ .

- a) Sea  $U$  un abierto con forma de estrella en  $\mathbb{R}^2$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función diferenciable,  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- 1) Probar que las formas  $\omega = vdx + udy$  y  $*\omega$  son cerradas.
  - 2) Probar que  $u$  y  $v$  son armónicas.
- b) Sea  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  armónica. Probar que existe  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Sugerencia: Observar que  $*du$  es cerrada.