Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo III
Primer semestre de 2008

Práctico 2

Si U es un abierto en $\mathbb{R}^3$, escribiremos por $\mathcal{X}(U)$ al conjunto de los campos vectoriales (diferenciables) en U.

1. Calcular la derivada exterior de las siguientes formas en $U \subset \mathbb{R}^3$:
   a) $x^3y - \cos(z)e^{yx}$, $U = \mathbb{R}^3$.
   b) $13x\, dx + y^2\, dy + xyz\, dz$, $U = \mathbb{R}^3$.
   c) $\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dx + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dy + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dz$, $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
   d) $z^2\, dx \wedge dy + (z^2 + 2y)\, dx \wedge dz$, $U = \mathbb{R}^3$.
   e) $\left(x + 2y^3\right)\, (dz \wedge dx + \frac{1}{2}\, dy \wedge dx)$, $U = \mathbb{R}^3$.

2. Probar que si $U \subset \mathbb{R}^3$ y $f, g \in C^\infty(U)$, entonces $d(f\, dg) = df \wedge dg$ en $\Omega^1(U)$.

3. Para los campos X e Y en $\mathbb{R}^3$ definidos por $X(x,y,z) = (-y, x, 0)$ e $Y(x,y,z) = (3x, 2y, z)$, calcular su rotacional y su divergencia.

4. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. A cada campo $F = \left(F^1, F^2, F^3\right) \in \mathcal{X}(U)$ le asociamos las formas $\omega_F^1 \in \Omega^1(U)$ y $\omega_F^2 \in \Omega^2(U)$ y cada función $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$ le asociamos la forma $\omega_f^3 \in \Omega^3(U)$, definidas mediante:

   $$\omega_F^1 = F^1dx + F^2dy + F^3dz, \quad \omega_F^2 = F^3dx\wedge dy + F^2dz\wedge dx + F^1dy\wedge dz, \quad \omega_f^3 = f dx\wedge dy\wedge dz$$

   Probar :

   $$df = \omega_{\nabla f}^1, \quad d\left(\omega_F^1\right) = \omega_{\mathrm{rot}\, F}^2, \quad d\left(\omega_F^2\right) = \omega_{\mathrm{div}\, F}^3.$$

5. Sean $F, G \in \mathcal{X}(U)$ y $f, g \in \mathrm{C}^\infty(U)$. Probar:
   a) $\omega_F^1 \wedge \omega_G^1 = \omega_{F\times G}^2, \quad \omega_F^1 \wedge \omega_G^2 = \omega_{\langle F,G\rangle}^3, \quad f\omega_G^1 = \omega_{fG}^1, \quad f\omega_G^2 = \omega_{fG}^2.$
   b) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f, \quad \mathrm{rot}(gF) = g\,\mathrm{rot}\, F + \nabla g \times F, \quad \mathrm{div}(gF) = \langle \nabla g, F\rangle + g\,\mathrm{div}\, F.$

6. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $F \in \mathcal{X}(U)$ y $f \in C^\infty(U)$. Probar:

   $$\mathrm{rot}(\nabla f) = 0, \quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, F) = 0, \quad \mathrm{rot}(f\nabla f) = 0.$$

7. Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y $F \in \mathcal{X}(U)$. Se dice que F tiene un *potencial escalar* si $F = \nabla f$, con $f \in C^\infty(U)$, que F tiene un *potencial vector* si $F = \mathrm{rot}\, G$ con $G \in \mathcal{X}(U)$, que F es *irrotacional* si $\mathrm{rot}\, F = 0$ y que F es *solenoidal* si $\mathrm{div}\, F = 0$.
   a) Probar que si F tiene un potencial escalar, entonces es irrotacional.
   b) Probar que si F tiene un potencial vector entonces es solenoidal.

8. Sean $U = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : \ r > 0, \ 0 < \theta < 2\pi\}$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : \ x \geq 0\}$ y $f : U \to V$ definida por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Como f es un difeomorfismo, entonces el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ define a $r, \theta : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como funciones de x e y. Probar

$$d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy, \quad dr = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy, \quad \text{en } \Omega^1(V).$$

9. Investigar si las siguientes formas son cerradas y/o exactas en U. Si son exactas dar un potencial ($f \in \mathrm{C}^\infty(U)$ tal que $df = \omega$).

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy \text{ en } U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad \omega = \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{y}\,dy \text{ en } U = \mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\},$$

$$\omega = e^x y\,dx + z\,dy + e^x\,dz \text{ en } U = \mathbb{R}^3, \qquad \omega = \left(e^x y^2 + z\right)\,dx + 2e^x y\,dy + x\,dz \text{ en } U = \mathbb{R}^3.$$

10. Probar que la forma $\omega = (1 - e^x)\,dx \wedge dy - yz\,dz \wedge dx + (xz - 1)\,dy \wedge dz$ es cerrada. Hallar un potencial con la tercera componente nula y otro con la primera componente nula y probar que difieren en una forma exacta.

11. Probar que las siguientes formas son exactas encontrando un potencial para cada una.

    a) $\omega = \left(6x^2y - 3xy^2\right)\,dx \wedge dy$ en $\mathbb{R}^2$.
    b) $\omega = -4xy\,dx \wedge dy - 2xz\,dz \wedge dx + 2yz\,dy \wedge dz$ en $\mathbb{R}^3$.
    c) $\omega = 12x^2y^3z^4\,dx \wedge dy \wedge dz$ en $\mathbb{R}^3$.