Ecuaciones Diferenciales curso 2006

Lista de ejercicios n.4

Estabilidad de sistemas lineales a coeficientes constantes

1. Consideramos una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supongamos que $A = PJP^{-1}$, donde J es la matriz de Jordan de la matriz A. Es decir, J es una matriz formada de bloques cuadrados $J_1, \ldots, J_k$ sobre la diagonal, ceros fuera de estos bloques, y cada uno de estos bloques es de la forma

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \lambda_i & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

donde λ_i es valor propio de la matriz A. Si los valores propios de A son reales, las matrices P y P^{-1} son de coeficientes reales; Si A tiene valores propios complejos (no reales), entonces necesariamente P y P^{-1} tendrán coeficientes complejos.

   (a) Demostrar que

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & & \cdots & & \frac{t^r}{r!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & & & \\ & & 1 & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ & 0 & & & & 1 & t \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Deducir que si $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$ entonces cada función $x_j(t)$ es de la forma

$$x_j(t) = P_{j1}(t)\, e^{\lambda_1 t} + \cdots + P_{jk}(t)\, e^{\lambda_k t}$$

   donde cada $P_{ji}(t)$ es un polinomio de coeficientes complejos.

(c) Probar que si $\mu > Re(\lambda)$ para todo λ valor propio de la matriz A, entonces existe una constante $K > 0$ tal que para toda solución $x(t)$ se cumple
$$\|x(t)\| \leq K\, e^{\mu t}\, \|x(0)\| \ .$$

2. Sea $\dot{x} = Ax$ una ecuación lineal homogénea. Probar que si una órbita es estable entonces todas las órbitas son estables. Probar también que si una órbita es asintóticamente estable entonces todas lo son. Finalmente, observar que si existe una solución no acotada, entonces todas las órbitas son inestables. ¿Qué pasa si la ecuación no es homogénea?

3. Discutiremos ahora la estabilidad de las órbitas de una ecuación lineal homogénea $\dot{x} = Ax$ en función de los valores propios de la matriz A. En lo que sigue haremos uso de la siguiente afirmación: Si $\lambda = a + ib$ es valor propio de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entonces existen vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u, v \neq 0$, tales que $e^{At}u = e^{at}(\cos(bt)u + \operatorname{sen}(bt)v)$.

   (a) Mostrar que si $0 \in \mathbb{R}^n$ es estable para $\dot{x} = Ax$ entonces todo valor propio λ de A verifica $Re(\lambda) \leq 0$.

   (b) Observar que si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces las órbitas del sistema $\dot{x} = Ax$ son inestables.

   (c) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz tal que $Re(\lambda) \leq 0$ para todo valor propio λ. ¿ Bajo qué hipótesis las órbitas del sistema $\dot{x} = Ax$ son estables?

   (d) Mostrar que $0 \in \mathbb{R}^n$ es asintóticamente estable si y sólo si todo valor propio λ de A verifica $Re(\lambda) < 0$.

4. Estudiar la estabilidad de las órbitas para las ecuaciones del ejercicio 4 de la lista de ejercicios anterior.