

Ecuaciones Diferenciales curso 2006

Lista de ejercicios n.3

- (a) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas en V , entonces existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $v \in V$ se cumple $\|v\|_1 \leq C \|v\|_2$.
- (b) Si $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial (de dimensión n^2) de las matrices $n \times n$ a coeficientes reales, probar que

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, +\infty)$$

$$A \mapsto \|A\| = \sup \{ \|Av\| \mid v \in \mathbb{R}^n \ \|v\| = 1 \}$$

es una norma tal que para todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ vale $\|Av\| \leq \|A\| \|v\|$.

- (c) Probar que

$$\|A\|_0 = \sup \{ |a_{ij}| \mid 1 \leq i, j \leq n \}$$

es otra norma en \mathcal{M}_n .

- (d) Una función $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n$ es continua si para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $\lim_{h \rightarrow 0} \|A(t+h) - A(t)\| = 0$. Probar que $A(t)$ es continua si y solo si cada coeficiente $a_{ij}(t)$ es una función continua de \mathbb{R} en \mathbb{R} .
- (e) Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n$ derivable, es decir, tal que cada coeficiente $a_{ij}(t)$ es una función derivable. Probar que la función $h(t) = \det(A(t))$ es derivable y que su derivada vale

$$\dot{h}(t) = \sum_{k=1}^n \det(c_{ij}^k(t))$$

donde $c_{ij}^k(t) = a_{ij}(t)$ si $i \neq k$ y $c_{ij}^k(t) = \dot{a}_{ij}(t)$ si $i = k$. En otras palabras, la matriz (c_{ij}^k) es la que se obtiene derivando la fila k de la matriz A .

- (f) **(Fórmula de Liouville)**. Probar que si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n$ es la matriz fundamental de la ecuación lineal $\dot{x} = A(t)x$ (i.e. $\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\phi(0) = I$) entonces para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ vale que

$$\frac{d}{dt} \det \phi(t) = \det \phi(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds}$$

donde $\text{tr} A$ denota la traza (suma de los elementos de la diagonal) de la matriz A .